

Herausgegeben von
Friedrich Kasch
und Bodo Pareigis
Mathematisches
Institut der
Ludwig-Maximilians-
Universität München

—
Titel Nr. 44
10. Jahrgang
1983

Algebra

Berichte
44

Cornelius Greither

—
Zum Kürzungsproblem
Kommutativer Algebren

1983
—

Verlag
Reinhard
Fischer

ZUM KÜRZUNGSPROBLEM
KOMMUTATIVER ALGEBREN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades des
Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Cornelius Greither
aus München

im August 1982



1. Berichterstatter: Prof. Dr. Bodo Pareigis
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Friedrich Kasch

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1983

Inhalt

Einleitung	i - vii
<u>1. Kapitel:</u> Projektive Algebren und $\mathbb{A}^n$ -Faserräume ($n = 1, 2, 3$)	
(1.0) Einführung	1
(1.1) R-Algebren in n Variablen	3
(1.2) Der Hauptsatz für $\mathbb{A}^1$ -Faserräume	6
(1.3) $\mathbb{A}^n$ -Faserräume für $n > 1$, und projektive Algebren in mehr als einer Variablen	16
(1.4) Invertierbare Algebren und stabil freie Algebren (Kürzungsproblem)	25
<u>2. Kapitel:</u> Radizieller Abstieg und inseparable Formen der affinen Geraden	
(2.0) Einführung	27
(2.1) Ein modifizierter Amitsurkomplex; Kozyklen und Derivationen	28
(2.2) Allgemeines über Formen von $\mathbb{A}^1$	48
(2.3) Formen von $\mathbb{A}^1$ und ihr arithmetisches Genus	55
(2.4) Zusammenhang zwischen Grad und Genus einer Form von $\mathbb{A}^1$	78
<u>3. Kapitel:</u> Zum Kürzungsproblem über nichtperfekten Grundkörpern	
(3.1) Der Hauptsatz und einige Lemmata	87
(3.2) Hauptteil des Beweises	96
(3.3) Beweis von Satz A	106
Literatur	110

"Wirklich gefährlich ist ja nur
das, was modern und verständlich
zur gleichen Zeit ist - deshalb
schweigt man ja auch systematisch
Leute wie James Joyce tot."

ARNO SCHMIDT,

Kaff auch Mare Crisium

Sunt bona, sunt quaedam mediocra,
sunt mala plura,
Quae legis hic: aliter, Avite,
non fit liber.

MARTIAL

EINLEITUNG

Die in dieser Arbeit behandelten Probleme entspringen alle derselben einfach zu formulierenden Fragestellung:

- (C) Sei A eine R -Algebra, und $A[X] \cong R[T_1, \dots, T_{n+1}]$.
Ist dann $A \cong R[T_1, \dots, T_n]$?

(Alle Ringe und Algebren seien kommutativ.)

Diese Fragestellung heißt auch das Kürzungsproblem für kommutative Algebren und wurde zuerst von P. Eakin und W. Heinzer aufgeworfen. Bald darauf wurden sehr ähnliche Fragen untersucht, in denen die Voraussetzung an A etwas abgeschwächt wurde:

- (1) Eine R -Algebra heißt projektiv, wenn sie Retrakt einer Polynomialgebra $R[T_1, \dots, T_m]$ über R ist. (Beachte, daß $R[T_1, \dots, T_m]$ die freie kommutative R -Algebra über m Elementen ist. In etlichen Arbeiten heißen projektive Algebren "schwach projektiv".)

- (2) Eine R -Algebra A heißt invertierbar, wenn es eine R -Algebra B gibt, sodaß $A \otimes_R B \cong R[T_1, \dots, T_m]$ als R -Algebren für geeignetes m . (In etlichen Arbeiten wird dieser Begriff "stark projektiv" genannt.)

Folgendes ist leicht einzusehen: Wenn A die Prämissen des Krzungsproblems erfüllt, dann ist A projektiv und invertierbar. Schon in [Cn] wurde bemerkt, daß invertierbare Algebren immer projektiv sind. Die Umkehrung ist nach [Gr]₂

falsch; hiervon wird im ersten Kapitel noch die Rede sein.

Um dem Problem (C) näherzukommen, möchte man unter geeigneten Voraussetzungen folgendes beweisen:

- (*) Eine projektive (bzw. invertierbare) R -Algebra A ist isomorph zu einer Polynomalgebra über R .

Da aber für jeden endlich erzeugten projektiven R -Modul P die symmetrische Algebra $S_R(P)$ invertierbar ist (vgl. [Cn]), ist folgende Hypothese sinnvoller:

- (**) Eine projektive (bzw. invertierbare) R -Algebra A ist (bis auf Isomorphie) symmetrische Algebra eines endlich erzeugten projektiven R -Moduls.

N.B.: P wird durch $S_R(P)$ eindeutig bestimmt, siehe [Ba-Cn-Wr] Lemma 4.6.

Auch (**) ist nur richtig (bzw. beweisbar), wenn man Voraussetzungen an R stellt; es gibt Gegenbeispiele. Nach HAMANN [Ha] gibt es für $R = k[t^2, t^3]$, $\text{char}(k) < \infty$, sogar eine R -Algebra A mit $A[X] \cong R[T_1, T_2]$, aber $A \not\cong S_R(P)$ für alle R -Moduln P .

Die Arbeit "Locally polynomial algebras are symmetric algebras" [Ba-Cn-Wr] liefert das Rüstzeug, um für noethersches R beim Beweis von (**) eine Reduktion auf den Fall, daß R lokal ist, vornehmen zu können. Sei nämlich $A_{\underline{m}} \cong S_R(P(\underline{m}))$ für alle maximalen Ideale $\underline{m}$ von R , wobei $P(\underline{m})$ über $R_{\underline{m}}$ endlich erzeugt und projektiv ist. Dann ist $P(\underline{m})$ frei, und $A_{\underline{m}}$ ist ein Polynomring über $R_{\underline{m}}$. Da A als projektive Algebra vom endlichen Typ über R ist, ist A endlich präsentiert über R , und nach dem Hauptsatz aus [Ba-Cn-Wr] folgt die Konklusion in (**). (Für lokales R sind (*) und (**) offenbar dasselbe.)

Es ist für lokales R erstaunlicherweise nicht klar, ob die R -Algebren A , die die Voraussetzungen von (C) erfüllen, eine echte Teilklasse der invertierbaren R -Algebren sind. Ergebnisse von Asanuma lassen sogar spekulieren, daß die Antwort "nein" sein könnte, zumindest wenn man die Prämisse in (C) leicht abschwächt zu $A[X_1, \dots, X_m] \cong R[T_1, \dots, T_{n+m}]$.

Fassen wir zusammen, was über das Kürzungsproblem (C), über invertierbare Algebren und projektive Algebren bekannt ist:

Costa [Co] zeigte für faktorielle Ringe R : Jede projektive R -Algebra A mit Transzendenzgrad 1 über R ist symmetrisch (d.h. isomorph zu $S_R(F)$ für ein geeignetes F). Schon früher hatte E. Hamann ein Beispiel eines lokalen Integritätsrings R und einer projektiven R -Algebra A vom Transzendenzgrad 1 über R gegeben, sodaß A nicht symmetrisch ist. (Siehe oben!) Hamann und Asanuma [As]₁ gaben Kriterien an, wann $A[X] \cong R[T_1, T_2]$ schon $A \cong R[T]$ impliziert - die charakterisierende Bedingung an R ist p -Seminormalität für alle p .

Den Begriff "Transzendenzgrad 1 über R " kann man auf nichtintegre Grundringe R verallgemeinern: so entsteht der Begriff "R-Algebra in einer Variablen". In der Arbeit [Gr]₂ des Autors wird gezeigt: Genau dann sind alle projektiven R -Algebren in einer Variablen symmetrisch, wenn R seminormal ist, und genau dann sind alle invertierbaren R -Algebren in einer Variablen symmetrisch, wenn R p -seminormal für alle p ist. Hierbei sei R reduziert. Außerdem wird bewiesen: Wenn es überhaupt nichtsymmetrische projektive R -Algebren in einer Variablen gibt, dann gibt es auch schon nichtinvertierbare unter ihnen.

Brewer und Kustin [Br-Ks] haben dann mit ähnlichen Methoden gezeigt, daß es in dieser Situation nichtinvertierbare projektive Algebren in n Variablen gibt, $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Damit sind wir bei projektiven Algebren in mehr als einer Variablen. Lange Zeit war nicht einmal bekannt, ob eine projektive $\mathbb{C}$ -Algebra A in 2 Variablen (d.h. $\text{tr.deg}_{\mathbb{C}} \text{Quot}(A) = 2$) isomorph zu $\mathbb{C}[T_1, T_2]$ sein muß. Dies ist tatsächlich der Fall: Aus Arbeiten von Fujita [Fu], Miyanishi-Sugie [M-Su] und Russell [R]₂ ergibt sich die Lösung des sogenannten "Cancellation Problem" über einem perfekten Grundkörper k :

$$(C_2) \quad \begin{aligned} A[X_1, \dots, X_m] &\cong k[T_1, \dots, T_{m+2}] \\ A &\cong k[T_1, T_2] \end{aligned} \quad \implies$$

Wie wir in dieser Arbeit zeigen, ergibt sich mit ähnlichen Methoden auch, daß projektive k -Algebren in zwei Variablen symmetrisch, also polynomial sind, wenn k perfekt ist (1.2).

Es stellen sich zwei Fragen: Was geschieht, wenn der Grundring kein Körper ist? Was geschieht, wenn er ein nichtperfekter Körper ist?

Zur ersten Frage muß gesagt werden, daß bis auf eine Reduktion modulo Nilpotents praktisch nichts sicher bekannt ist. Kambayashi([A]₂) hat folgenden Satz publiziert:

(K) Sei R ein diskreter Bewertungsring, $\bar{R} = R/Ra(R)$ algebraisch abgeschlossen mit $\text{char.} = 0$. Sei ferner A eine flache R -Algebra vom endlichen Typ, und seien sowohl $\text{Quot}(R) \otimes_R A$ wie auch $\bar{R} \otimes_R A$ Polynomringe in zwei Variablen über $\text{Quot}(R)$ respektive $\bar{R}$. Dann ist schon $A \cong R[X, Y]$.

Wie von Kambayashi selbst bemerkt, enthält der Beweis eine Lücke, und (K) muß bis dato als Vermutung bezeichnet werden. Es ist uns weder gelungen, die Lücke zu beheben, noch ein Gegenbeispiel zu finden.

Falls (K) richtig ist, können wir in (1.2) ein Analogon zu obigem Satz beweisen: Sei R vom endlichen Typ über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k , $\text{char}(k) = 0$, $\dim(R) \leq 1$. Genau dann sind alle projektiven R -Algebren in 2 Variablen symmetrisch, wenn R seminormal ist. (R reduziert.)

Die zweite Frage (s.o.) gab Anlaß zum dritten Kapitel dieser Arbeit: "Cancellation" für nichtperfektes k . Ich vermute, daß (C_2) für jeden Körper richtig ist, kann es aber nicht beweisen. Das Hauptthema ist, daß für nichtperfektes k Glattheit und Regularität (=Singularitätenfreiheit) von k -Schemata nicht mehr dasselbe ist. Beim Beweis von (C_2) benutzt man stets nichtsinguläre projektive Abschlüsse S der (glatten) Varietät $\text{Spec}(A)$, aber man kommt in große Schwierigkeiten, wenn S nicht glatt ist. (Die "schlechten" Punkte liegen natürlich in $D := S - \text{Spec}(A)$.) Zum Beispiel bleibt nur Glattheit, nicht aber Regularität, bei Grundkörpererweiterung bestehen. Naturgemäß verwendet der Beweis dauernd Tensorieren

mit dem perfekten Abschluß k' von k . Deswegen müssen wir eine Hilfsvoraussetzung machen ("Smooth Embedding"):

(SE) $\text{Spec}(A)$ läßt sich offen in ein vollständiges glattes k -Schema S einbetten, derart daß der Divisor $S - \text{Spec}(A)$ die sogenannte s.n.c.-Eigenschaft hat.

S.n.c. steht für "Strong Normal Crossing", Details siehe Kapitel III. Für perfektes k ist (SE) stets erfüllbar.

Außerdem müssen wir Charakteristik 2 verbieten. Dann können wir (C_2) beweisen.

Der eigentliche Beweis (3.1, 3.2) verwendet als Hilfsmittel einen für sich interessanten Satz A. Dieser Satz ist ein Resultat der kommutativen Algebra, dessen Spezialfall für $k = \bar{k}$ schon im klassischen Cancellation Problem benützt wurde. Unsere Verallgemeinerung stützt sich auf Lemmata von Russell und Sathaye [R-Sa]:

(A) Sei k separabel abgeschlossen, A 2-dimensionale glatte k -Algebra vom endlichen Typ, A geometrisch faktoriell (siehe (3.3)), $A^* = k^*$. Wenn $\text{Spec}(A)$ einen offenen affinen Zylinder enthält (siehe (3.1)), dann ist $A \cong B[T]$ für eine k -Algebra $B \subset A$.

Die Voraussetzung über den affinen Zylinder besagt lediglich: Es gibt ein $a \in A$ mit $A_a \cong R[T]$, $R \subset A_a$.

Im Kapitel III benützen wir einen neuen Kalkül für rein inseparablen (auch: radiziellen) Abstieg, der im Kapitel II entwickelt wird. Ausgehend vom gewöhnlichen Amitsurkomplex und von der Amitsurkohomologie, werden für $[K:k] = p$, $K|k$ rein inseparabel, die K -Formen eines k -Objekts A klassifiziert durch gewisse Derivationen D von $K \otimes A$ modulo einer (relativ einfachen) Äquivalenzrelation. Dies ist etwas einfacher als die klassische Theorie mittels H^1 von p -Liealgebren. (Ein Kozyklus $\varphi \rightarrow \text{Der}(K \otimes A)$ ist wesentlich unhandlicher als ein einziges Element $D \in \text{Der}(K \otimes A)$). Dafür muß man allerdings einige sehr technische Resultate beweisen. Geradezu ästhetisch ist an unserer Theorie, daß man zur Derivation D den zugehörigen Automorphismus von $K \otimes K \otimes A$ mittels einer Art Exponentialreihe sofort angeben kann, und daß man aus D die

zugehörige verzerrte Form relativ gut berechnen kann.

Dieser Formalismus kommt im Kapitel III noch nicht genug zum Tragen, und wir benützen ihn deshalb im Kapitel II zu einer Fragestellung, die dem Kürzungsproblem nahesteht, nämlich der Klassifizierung rein inseparabler Formen von $k[T]$ (d.h. von A_k^1). Hier gibt es bereits Ergebnisse von Kambayashi-Miyayishi-Takeuchi [Ka-M-Ta] und P. Russell [R]₁, vor allem über diejenigen Formen X , die eine algebraische Gruppenstruktur tragen. Bereits diese Autoren betrachteten die Invariante $p_a(X)$ ("arithmetisches Genus"), die über eine Vervollständigung des Schemas X definiert ist. Wir zeigen, welche Werte $p_a(X)$ annehmen kann (N.B. $p_a(A^1) = 0$), wobei wir uns auf $[K:k] = p$ beschränken. Nach ziemlich langen und teilweise technischen Beweisen ergibt sich für p_a die allgemeine Form

$$p_a(X) = \frac{p-1}{2} \cdot (n-1), \text{ mit } n \in \mathbb{N} - p\mathbb{N}.$$

Wir definieren eine weitere Invariante "Grad", die im allgemeinen leichter zu berechnen scheint, und stellen für diejenigen X , deren Differentialmodul frei ist, einen Zusammenhang zwischen Grad und arithmetischem Genus her. Insbesondere werden dabei alle X mit Gruppenstruktur erfaßt, und man findet und verallgemeinert Resultate von Russell und Tate.

Die inseparablen Formen der affinen Geraden bilden die eine größere Abschweifung vom Hauptthema, dem Kürzungsproblem. Als zweite Abschweifung kann man den ersten Teil des ersten Kapitels ansehen. Dort wird bemerkt, daß alle projektiven R -Algebren A in einer Variablen A^1 -Faserräume über R sind. (D.h.: Für jedes $p \in \text{Spec}(R)$ ist $\kappa(p) \otimes_R A \cong \kappa(p)[T]$.) Anschließend wird der Versuch unternommen, die Theorie der projektiven R -Algebren in einer Variablen neu darzustellen im Rahmen einer Theorie der A^1 -Faserräume. (N.B. Auch rein inseparable Formen von A^1 sind in gewissem Sinne A^1 -Faserräume.) Ursprünglich sollte ein Ergebnis von Kambayashi und Miyayishi [Ka-M] verbessert werden, welches besagt: über einem faktoriellen Grundring R sind alle A^1 -Faserräume symmetrische Algebren. (A^1 -Faserräume werden stets als flach und vom

endlichen Typ über R vorausgesetzt.) Unter Benutzung von Ideen und Preprints von T. Asanuma [As]₂ ergibt sich folgendes Bild:

(I) Jede augmentierte $\mathbb{A}^1$ -Faserung über einem seminormalen noetherschen Ring ist symmetrische Algebra.

(Dieses Resultat verwendet Asanumas Ergebnisse nicht.)

(II) Aus (tiefliegenden) Ergebnissen von Asanuma folgt: Jede $\mathbb{A}^1$ -Faserung über einem noetherschen Ring ist augmentiert.

Aus (I) ergibt sich ein neuer Beweis des Satzes über projektive Algebren in [Gr]₂.

In (1.3) wird schließlich noch dargelegt, daß die Ergebnisse für Algebren in einer Variablen selbst sinngemäß für n Variablen nicht mehr gelten (was man auch erwartet hat). Gestützt auf ein Ergebnis von J. Yanik [Y]₂ (welches sich seinerseits auf ein Lemma des Autors stützt), zeigen wir: Es gibt einen vierdimensionalen noetherschen Ring R , der faktoriell ist (also viel mehr als seminormal), über dem eine projektive nichtinvertierbare Algebra A in drei Variablen existiert. A ist zugleich eine $\mathbb{A}^3$ -Faserung. Unter den vielen Fragen, die sich stellen, erwähnen wir nur: Kann man die Dimension von R oder die Variablenzahl von A in diesem Beispiel verringern?

Aus dieser Diskussion geht hervor, daß man über das allgemeine Kürzungsproblem immer noch sehr wenig weiß. Der Fall einer Variablen ist in allen Variationen zufriedenstellend gelöst (vgl. hierzu auch (1.4) über invertierbare Algebren in einer Variablen). Für zwei Variablen hat man einige Resultate und Ansätze, doch ist man von einer vollständigen Theorie noch weit entfernt. Es wird sich zeigen, ob man hier mit verbesserten (geometrischen) Methoden zu weiteren Ergebnissen gelangen kann.

Meinem Betreuer Professor Bodo Pareigis möchte ich an dieser Stelle für viele hilfreiche Gespräche und für sein in mich gesetztes Vertrauen herzlich danken.

Konventionen und Definitionen

Alle Ringe, Algebren und Ringhomomorphismen sind unitär,
alle Ringe und Algebren kommutativ.

Ein k -Schema (k beliebiger Körper) ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der eine Überdeckung $X = \bigcup U_i$ durch offene Mengen U_i besitzt derart daß die geringten Räume $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ isomorph zu Spektren von k -Algebren A_i sind.

Wir setzen stets voraus, daß alle Schemata separiert sind ([Ht] p.96, vgl. auch p.99).

Falls sich I endlich wählen läßt und dabei die A_i vom endlichen Typ über k sind, dann heißt das Schema X über k algebraisch.

Eine Kurve über k ist ein eindimensionales integrales (=reduziertes irreduzibles) k -Schema. Eine Fläche über k ist ein zweidimensionales integrales k -Schema. Kurven und Flächen können vollständig sein oder auch nicht.

Ein k -Schema X heißt nichtsingulär (=regulär), wenn jeder Punkt von X nichtsingulär ist, d.h. wenn $\mathcal{O}_x$ ein regulärer lokaler Ring ist für alle $x \in X$.

$\bar{k}$ bezeichnet den algebraischen Abschluß von k .

Die Glattheit eines Morphismus $f: X \rightarrow Y$ von Schemata, die über k algebraisch sind, ist in [Ht] p.268 erklärt. X heißt glatt über k , wenn der kanonische Morphismus $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ glatt ist. Nach [Ht] III 10.2 ist dies zur Regularität des $\bar{k}$ -Schemas $\bar{k} \otimes_k X$ äquivalent, oder (falls X integral ist) dazu, daß $\bigcap_{X|k}$ lokal frei ist. Glattheit bleibt bei Grundkörpererweiterung stets erhalten, siehe [Ht] III 10.1b).

Für einen Punkt x eines Schemas X bezeichnen wir den Restklassenkörper $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x$ mit $\kappa(x)$. $\kappa(X)$ bezeichnet die sogenannte Kodaira-Dimension eines Schemas X (siehe die Arbeit [R]₂). Verwechslung dieser beiden Notationen erscheint unwahrscheinlich.

1. Projektive Algebren und $\mathbb{A}^n$ -Faserräume ($n = 1, 2, 3$) ---

(1.0) In diesem Kapitel werden in einiger Allgemeinheit diejenigen Grundringe R charakterisiert, über denen projektive Algebren in einer Variablen bzw. $\mathbb{A}^1$ -Faserräume symmetrische Algebren sind. In beiden Fällen ergibt sich: $R/\text{Nil}(R) =: R_{\text{red}}$ muß seminormal sein. Da die anderen Begriffe bereits in der Einleitung diskutiert wurden, geben wir hier nur die Definition eines $\mathbb{A}^n$ -Faserraums über R :

Eine R -Algebra A heißt $\mathbb{A}^n$ -Faserung oder $\mathbb{A}^n$ -Faserraum, wenn A flach und vom endlichen Typ über R ist, und wenn für jedes $\underline{p} \in \text{Spec}(R)$ gilt: $\kappa(\underline{p}) \otimes_R A \cong \kappa(\underline{p})[T_1, \dots, T_n]$.

Da häufig Polynomringe auftreten, kürzen wir ab:

$$R^{[n]} := R[T_1, \dots, T_n] .$$

Jede projektive R -Algebra in einer Variablen ist ein augmentierter $\mathbb{A}^1$ -Faserraum (1.1.4). Deshalb werden wir uns von vornherein mit $\mathbb{A}^1$ -Faserräumen befassen. Es gibt zwei relevante Ergebnisse in der Literatur:

(I) $[\text{Gr}]_2$: Falls R_{red} seminormal ist, so sind alle projektiven R -Algebren in einer Variablen symmetrisch. Die Umkehrung gilt, wenn $\text{Nil}(R) = 0$.

(II) (Folgerung aus $[\text{As}]_2$, Thm. 5.7) Falls R noethersch und normal ist, so sind alle $\mathbb{A}^1$ -Faserungen A über R symmetrisch. Denn nach loc. cit. folgt $A_{\underline{p}} \cong R_{\underline{p}}^{[1]}$ für alle $\underline{p} \in \text{Spec}(R)$, und mit $[\text{Ba-Cn-Wr}]$ die Behauptung.

Asanuma zeigt in seiner Arbeit sogar noch mehr:

(III) $[As]_2$, Thm. 5.7 und 4.5, Lemma 5.1: Über einem reduzierten **noetherschen** Ring R ist jede A^1 -Faserung A bereits eine projektive Algebra.

De facto wird nur der Fall R lokal bewiesen. Der allgemeine Fall läßt sich mit Asanumas Methoden leicht ableiten, vgl. (1.1.5).

Für eine Theorie der projektiven Algebren in einer Variablen und der A^1 -Faserräume sind jetzt zwei Ansätze möglich:

- a) Man spannt Satz I und III zusammen und erhält das gewünschte Ergebnis für A^1 -Faserräume, falls R noethersch und reduziert ist.
- b) Man verallgemeinert Satz II so, daß man sofort eine Charakterisierung der Ringe R bekommt, über denen A^1 -Faserungen symmetrisch sind. Satz I fällt dann, sogar ohne Reduziertheitsvoraussetzung, ab.

Wir schlagen Weg b) ein, um die Arbeit "self-contained" zu halten und den nichtreduzierten Fall nicht zu verlieren. Leider können wir die Voraussetzung R noethersch nicht entbehren. Falls die gegebene A^1 -Faserung augmentiert ist, kommen wir gänzlich ohne $[As]_2$ aus. Wir müssen jedoch aus $[As]_2$ zitieren, daß stets eine Augmentation existiert. Dies ist insofern nicht sehr schlimm, als ja alle projektiven Algebren von Haus aus augmentiert sind.

Im anschließenden Abschnitt (1.3) geht es um projektive R -Algebren in 2 Variablen. Eine Einbettung in eine Theorie der A^2 -Faserräume ist schon deshalb problematisch, weil man hier nicht mehr sicher ist, ob jede projektive R -Algebra in 2 Variablen schon eine A^2 -Faserung ist. Dies liegt an Separa-

bilitätsproblemen, wie auch der folgende Satz zeigt, der eine leichte Verallgemeinerung eines Satzes von Russell und anderen ist:

SATZ (siehe 1.3.1): Projektive Algebren in 2 Variablen über einem perfekten Körper k sind zu $k^{[2]}$ isomorph.

Um hier überhaupt über Grundkörper hinauszukommen, müssen wir eine noch unbewiesene Hypothese (K), siehe Einleitung, zugrundelegen. Unter strengeren Voraussetzungen kann man dann die Theorie von (1.2) nachahmen:

SATZ (siehe 1.3.3): Für eine eindimensionale reduzierte k -Algebra R vom endlichen Typ ($k = \bar{k}$, $\text{char}(k) = 0$) sind äquivalent:

- i) R ist seminormal
- ii) Alle $\mathbb{A}^2$ -Faserungen über R sind symmetrisch
- iii) Alle projektiven R -Algebren in 2 Variablen sind symmetrisch.

Anschließend zeigen wir an höherdimensionalen Beispielen, wie wenig derzeit für R -Algebren in mehr als 2 Variablen an Ergebnissen zu erwarten ist. Auch hiervon war in der Einleitung bereits die Rede.

Zum Abschluß des Kapitels folgen einige Bemerkungen über stabil freie Algebren, die aber keine neuen Ergebnisse enthalten.

(1.1) R -Algebren in n Variablen

Sei R stets ein (wie immer) kommutativer Ring.

(1.1.1) DEF. a) Sei R reduziert. Eine R -Algebra A heißt R -Algebra in n Variablen, wenn es Elemente $x_1, \dots, x_t$ ($t \geq n$)

in A gibt mit:

- i) $x_1, \dots, x_n$ sind R -algebraisch unabhängig
- ii) $A = R[x_1, \dots, x_n, \dots, x_t]$
- iii) Für je $n+1$ Elemente $y_1, \dots, y_{n+1} \in \{x_1, \dots, x_t\}$ kann man ein Polynom $F \in R^{[n+1]}$ finden mit $F(y_1, \dots, y_{n+1}) = 0$ und $r \cdot F \neq 0$ für alle $r \in R - \{0\}$.

b) Für beliebiges R heißt A R -Algebra in n Variablen, wenn $R_{\text{red}} \otimes_R A$ eine R_{red} -Algebra in n Variablen ist. (Dies ist eine leichte Modifikation der entsprechenden Definition in [Gr]₂, Section 1.)

Analog zu [Gr]₂, Prop. 1.12, zeigt man:

(1.1.2) PROPOSITION. Sei R reduziert, und der volle Quotientenring K von R sei ein endliches Produkt von Körpern: $K = K_1 \times \dots \times K_m$ (dies gilt z.B., wenn R noethersch ist). Sei A eine endlich erzeugte torsionsfreie R -Algebra, $K_i \otimes_R A$ sei integer. Dann ist A eine R -Algebra in n Variablen genau dann, wenn $\text{Quot}(K_i \otimes_R A)$ den Transzendenzgrad n über K_i hat ($1 \leq i \leq m$).

(Also ist z.B. die Variablenzahl einer integren Algebra vom endlichen Typ über einem Integritätsring wohldefiniert, und gleich dem Transzendenzgrad.)

Für projektive Algebren kann man Genaueres sagen. Sei ϵ eine Augmentation von A (also $\epsilon: A \rightarrow R$, und $R \rightarrow A \xrightarrow{\epsilon} R$ ist die Identität). Die Zuordnung $T, T(A) := \text{Ke}(\epsilon)/\text{Ke}(\epsilon)^2$, induziert einen Funktor von den augmentierten R -Algebren in die R -Moduln. Für projektives A ist nach [Gr]₂, p.320, $T(A)$ endlich erzeugt projektiv über R , und $T(S \otimes_R A) \cong S \otimes_R T(A)$ für beliebige R -Algebren S . Wie in [Gr]₂, Lemma 1.13 a), zeigt man für Ringe R , welche die Prämisse von 1.1.2 erfüllen:

(1.1.3) PROPOSITION. Die projektive R -Algebra A ist eine R -Algebra in n Variablen genau dann, wenn der projektive

R -Modul $T(A)$ den konstanten Rang n hat. (Es kommt nicht auf die Wahl von ε an.) Insbesondere ist für zusammenhängendes R die Variablenzahl von A stets definiert.

(N.B. In loc.cit. mußte R reduziert sein. Dies entfällt bei uns, da in der jetzigen Definition 1.1.1 der nichtreduzierte Fall auf den reduzierten reduziert wird.)

Folgender wichtiger Sachverhalt wurde schon in der Einleitung erwähnt:

(1.1.4) KOROLLAR. Sei R noethersch oder integer. Eine projektive R -Algebra in einer Variablen ist ein $\mathbb{A}^1$ -Faserraum über R .

BEWEIS: Sei $\underline{p} \in \text{Spec}(R)$. Nach 1.1.3 ist $\kappa(\underline{p}) \otimes_R A$ wieder eine projektive $\kappa(\underline{p})$ -Algebra in einer Variablen (der Rang eines projektiven Moduls bleibt bei Ringwechsel erhalten), d. h. $\kappa(\underline{p}) \otimes_R A$ ist eine projektive Algebra mit Transzendenzgrad 1 über dem Körper $\kappa(\underline{p})$ (1.1.2). Nach [Co], Thm. 3.5 oder [Gr]₂, Thm. 2.1 ist $\kappa(\underline{p}) \otimes_R A \cong \kappa(\underline{p})^{[1]}$, q.e.d.

Schon in der Einführung zu diesem Kapitel wurde erwähnt, daß auch die Umkehrung von 1.14 unter gewissen Umständen richtig ist (Satz III). Wir führen dies noch etwas genauer aus:

(1.1.5) SATZ [Asanuma]. Für einen noetherschen reduzierten Grundring R sind projektive R -Algebren in einer Variablen und $\mathbb{A}^1$ -Faserräume über R dasselbe.

BEWEIS: Eine Richtung (die "leichte") ist gerade die Aussage von 1.1.4. Die andere folgt so: Nach [As]₂, 5.7, ist jeder $\mathbb{A}^1$ -Faserraum A eine "lokal quasipolynomial algebra" über R (siehe loc.cit.). Wir erinnern daran, daß A flach und vom endlichen Typ ist. Nach [As]₂, 5.1, ist $\Omega_R(A)$ projektiv über A , nach 4.5 ist also $A_{\underline{p}}$ "stark projektive" $R_{\underline{p}}$ -Algebra für alle $\underline{p} \in \text{Spec}(R)$. (D.h. per definitionem: Es gibt einen projektiven $A_{\underline{p}}$ -Modul M mit $S_{A_{\underline{p}}}(M) \cong R_{\underline{p}}^{[n]}$.) Wenn R lokal wäre, so wäre man (bis auf Prüfung der Variablenzahl von A) fertig: A ist Retrakt von $R^{[n]}$ wie gewünscht.

Um zu zeigen, daß A R -Algebra in einer Variablen ist, verwendet man 1.1.2: $K \cong \prod_1^m \text{Quot}(R/\underline{p}_i)$, $\{\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_m\} = \text{Minspec}(R)$, also $K_i \otimes_R A \cong \text{Quot}(R/\underline{p}_i) \otimes A \cong \kappa(\underline{p}_i) \otimes A \cong \kappa(\underline{p}_i)^{[1]}$ nach Vor., d.h. $\text{tr.deg}_{K_i}(\text{Quot}(K_i \otimes A)) = 1$.

Um die Einschränkung " R lokal" zu beseitigen, verwendet man Quillen-Induktion ([Ba-Cn-Wr], §3), um zu zeigen, daß auch A stark projektive R -Algebra ist. Da alles Wesentliche schon in Asanumas Arbeit enthalten ist, fassen wir uns kurz. Es sind vier Bedingungen zu prüfen: "Finiteness" ist Routine, "Specialization" ist trivial, "Local validity" ist genau unsere Aussage, daß $A_{\underline{p}}$ für alle $\underline{p}$ stark projektiv ist, und es bleibt die "Sheaf Condition" zu zeigen, d.h. folgende Implikation:

Sei B ein Ring, $s, t \in B$ koprim, und D eine B -Algebra. Dann ist mit D_s und D_t schon auch D selbst eine stark projektive Algebra (über dem jeweiligen Grundring B_s, B_t, B).

Dies ist $[As]_2$, Theorem 3.15 zu entnehmen. Die Verifikation der technischen Bedingung 2.6 in loc.cit. ist leicht.

(1.2) Der Hauptsatz für A^1 -Faserräume

Sei R bis auf Widerruf als noethersch vorausgesetzt.

(1.2.1) SATZ. Genau dann sind alle augmentierten A^1 -Faserräume über R symmetrische Algebren, wenn R_{red} seminormal ist.

Zum BEWEIS: Zunächst behandeln wir den Fall, daß R reduziert ist. Wenn dann R nicht seminormal ist, gibt es nach $[Gr]_2$, Cor.3.6 eine projektive R -Algebra B in einer Variablen, die nicht symmetrisch ist. Nach 1.1.4 ist B a fortiori

A^1 -Faserraum, also ist die eine Implikation des Satzes gezeigt. (Da die in $[Gr]_2$ verwendete Definition einer R -Algebra in einer Variablen geringfügig schwächer ist, muß man prüfen, daß Lemma 3.5 richtig bleibt. Dies liegt daran, daß $\mathbb{Q}$ (loc. cit.) über R transzendent ist.)

Wir setzen zum Beweis der anderen Implikation nun R als seminormal voraus. Sei A eine A^1 -Faserung über R . Dann ist zunächst S , der ganze Abschluß von R , ein endliches Produkt von Krullringen. Wenn $\text{Minspec}(R) = \{p_1, \dots, p_n\}$, so hat man nämlich $R \subset R/p_1 \times \dots \times R/p_n \subset K$ (= Quotientenring von R), und die erste Inklusion ist ganz. Also ist S auch der ganze Abschluß von $\prod R/p_i$; jedes R/p_i ist ein noetherscher Integritätsring, und der ganze Abschluß von R/p_i ist also ein Krullring S_i . Wir werden zuerst den Spezialfall erledigen, daß R selbst Krull ist. Danach wissen wir: Die A^1 -Faserung $S \otimes_R A$ über S ist symmetrisch, und anschließend schließen wir auf R zurück. Wir halten fest: $S = S_1 \times \dots \times S_n$.

Sei also R für den Moment ein beliebiger Krullring, A eine A^1 -Faserung über R , augmentiert durch $\varepsilon: A \rightarrow R$. Wir adaptieren ein Argument aus Asanumas Arbeit (5.7):

Setze $K = \text{Quot}(R)$. Nach Vor. ist $K \otimes_R A \cong K^{[1]}$, und A ist flach, also o.E. $A \subset K[X]$. Ferner kann man X so wählen, daß $(K \otimes \varepsilon)(X) = 0$ (ersetze X durch $X - (K \otimes \varepsilon)(X)$). Da A vom endlichen Typ ist, existiert ein $t \in R - \{0\}$ mit $R_t \otimes A \cong A_t = R_t[X]$. Wenn t eine Einheit ist, dann ist man sowieso fertig. Ansonsten sei $\{q_1, \dots, q_m\}$ die nach [Fo], 1.9c, endliche Menge der Primideale der Höhe 1, in denen t liegt; anders gesagt, für die $v_{q_i}(t) > 0$. Da R Krull ist, sind die R_{q_i} diskrete Bewertungsringe. Für faktorielle Grundringe haben aber schon Kambayashi und Miyanishi [Ka-M] gezeigt, daß A^1 -Faserungen symmetrisch, d.h. Polynomringe in einer Variablen sind. Also haben wir

$$R_{q_i} \otimes_R A \cong A_{q_i} = R_{q_i}[a_i X + b_i], \quad a_i \in K^*, \quad b_i \in K.$$

(Hier wurde verwendet, daß jedes Erzeugende der K -Algebra $K[X]$ die Form $aX+b$ hat mit $a \in K^*$, $b \in K$.)

Es folgt $\epsilon(a_i X + b_i) = b_i \in R_{\underline{q}_i}$ (wir schreiben das lokalisierte ϵ wieder ϵ), d.h. man hätte gleich $b_i = 0$ nehmen können. Sei dies geschehn. Wir behaupten: A ist bezüglich der durch $K[X] = \bigoplus K \cdot X^i$ definierten Graduierung homogen, i.e. $A = \bigoplus_{i \geq 0} J_i \cdot X^i$, J_i R -Untermodul von K .

Da R der Durchschnitt aller $R_{\underline{q}_i}$ ist ($\underline{q}_i$ Primideal der Höhe 1, siehe [Fo], 1.8b), ist $R = R_t \cap \bigcap_i R_{\underline{q}_i}$. Wegen der Flachheit von A über R ist auch $A = A_t \cap \bigcap_i A_{\underline{q}_i} = R_t[X] \cap R_{\underline{q}_1}[X] \cap \dots \cap R_{\underline{q}_m}[X] = \bigoplus_i J_i \cdot X^i$ mit $J_i := R_t \cap (R_{\underline{q}_1} a_1^i) \cap \dots \cap (R_{\underline{q}_m} a_m^i)$. A ist also graduierte R -Algebra mit $J_0 = R$ in Grad Null, und A ist von endlich vielen, o.E. homogenen Elementen als Algebra erzeugt, d.h. die J_i sind R -endlich erzeugt und somit gebrochene Ideale. Außerdem sind sie als direkte Summanden von A flach. Folglich ist $J_1^i \cong J_1 \otimes \dots \otimes J_1$, und ebenfalls flach. Wir behaupten $J_i = J_1^i$. Wie oben kann man diese Behauptung durch Lokalisieren nach t und nach den $\underline{q}_j$ testen. Da wir aber A_t und $A_{\underline{q}_j}$ kennen, ist $(J_i)_t = R_t$, $(J_i)_{\underline{q}_j} = R_{\underline{q}_j} a_j^i$, sowie $(J_1)_t^i = (R_t)^i$, $(J_1)_{\underline{q}_j}^i = (R_{\underline{q}_j} a_j)^i = R_{\underline{q}_j} a_j^i$, d.h. wie gewünscht: $J_i = (J_1)_t^i \cap (J_1)_{\underline{q}_j}^i = (J_1^i)_t \cap (J_1^i)_{\underline{q}_j} = J_1^i$. Zusammen mit $J_1^i \cong J_1 \otimes \dots \otimes J_1$ ergibt sich: A ist isomorph zur (a priori nicht kommutativen) Tensoralgebra $T_R(J_1)$; also ist $T_R(J_1)$ kommutativ und kanonisch isomorph zur symmetrischen Algebra $S_R(J_1)$.

Sei jetzt A endlich präsentiert. Dann folgt leicht, daß $J_1 = \text{Ke}(\epsilon)/\text{Ke}(\epsilon)^2$ als R -Modul endlich präsentiert ist. Zusammen mit der Flachheit von J_1 impliziert dies bekanntlich: J_1 ist endlich erzeugt und projektiv. Damit ist der Unterfall "R Krullring" mit der Zusatzvoraussetzung der endlichen Prä-

sentierung erledigt. Wir kehren zur alten Notation zurück:
 R ist noethersch reduziert und seminormal, S der ganze Abschluß von R . Da A über R endlich präsentiert ist, wissen wir, daß $S \otimes_R A$ über S symmetrische Algebra eines endlich erzeugten projektiven S -Moduls. Routineüberlegungen wie in [Ba-Cn-Wr], Beweis von "Finiteness" auf p. 291, zeigen: Es gibt eine R -Unteralgebra $S_0 \subset S$ vom endlichen Typ über R , sodaß bereits $S_0 \otimes_R A$ symmetrische Algebra eines endlich erzeugten projektiven S_0 -Moduls ist. $S_0 | R$ ist endlich.

Da A über R endlich präsentiert war, dürfen wir nach [Ba-Cn-Wr] R als lokal annehmen. Also ist S_0 semilokal, $\text{Pic}(S_0) = 0$, $S_0 \otimes_R A \cong S_0[X]$. R ist seminormal in S_0 .

LEMMA: $I := \text{Ke}(\epsilon)$ ist A -projektiv vom Rang 1.

Beweis: I ist als direkter Summand von A R -flach. Für alle $p \in \text{Spec}(R)$ ist $\kappa(p) \otimes_R I$ Kern einer Augmentation von $\kappa(p) \otimes_R A \cong \kappa(p)^{[1]}$, also nichttriviales Hauptideal.

Es reicht zu zeigen, daß $I_{\underline{m}}$ frei zyklisch ist für alle $\underline{m} \in \text{Max}(A)$, denn A ist noethersch. Sei $\underline{n} := R \cap \underline{m}$. Dann ist $(\kappa(\underline{n}) \otimes_R A) \otimes_A I = \kappa(\underline{n}) \otimes_R I$ frei zyklisch. Da es einen kanonischen Homomorphismus $\kappa(\underline{n}) \otimes_R A \rightarrow \kappa(\underline{m})$ gibt, ist also auch $\kappa(\underline{m}) \otimes_A I$ frei zyklisch. Nach Nakayama ist $I_{\underline{m}} = A_{\underline{m}} \cdot x$ zyklisch. Wir wollen zeigen: x ist in $A_{\underline{m}}$ kein Nullteiler. Dazu erweitern wir den Grundring $R_{\underline{n}}$ zu seinem Quotientenring U , der ein endliches Produkt von Körpern ist. Dann ist $A_{\underline{m}} \subset U \otimes A_{\underline{m}}$ (wegen der Flachheit); ferner ist $U \otimes A_{\underline{m}} = (U \otimes A_{\underline{n}})_{\underline{m}}$ Lokalisierung von $U^{[1]}$ und x erzeugt ein Augmentationsideal von $U \otimes A_{\underline{m}}$, weshalb x in diesem Ring kein Nullteiler sein kann.

Wir erinnern daran, daß R als lokal vorausgesetzt wird.

HAUPTLEMMA: I (s.o.) ist über A sogar frei (zyklisch).

Beweis: Hierzu brauchen wir den Satz von Traverso [Tr], Thm. 2.1, über seminormale Inklusionen noetherscher Ringe. Dieser Satz besagt in unserem Fall: Es existiert eine endliche Kette

von Zwischenringen

$$S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_n = R,$$

wobei für jedes $i \in \{1, \dots, n-1\}$ S_{i+1} die "Verklebung von S_i über einem Primideal p_i von R " ist. Diesen Begriff hat Traverso in loc.cit. so definiert:

Sei $A \subset B$ eine endliche Ringerweiterung, $p \in \text{Spec}(A)$. Die Verklebung C von B über p ist das Faserprodukt

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} C & \dashrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \kappa(p) & \xleftarrow{j} & \prod_{s=1}^m \kappa(P_s) \end{array}$$

Hierbei sind $P_1, \dots, P_m$ die (endlich vielen) Primideale von B über p , und j setzt sich diagonal aus den kanonischen Einbettungen zusammen.

Wir zeigen jetzt durch Induktion über i : Das Augmentationsideal $S_i \otimes_R I$ von $S_i \otimes_R A$ ist frei zyklisch und $S_i \otimes_R A \cong S_i[1]$. Wie schon gesagt, ist $S_0 \otimes_R A \cong S_0[1] = S_0[X]$, $S_0 \otimes_R I$ ist also sicher frei (von der Form $(X-s)$ für ein $s \in S_0$). Also funktioniert der Induktionsanfang mit $i = 0$. Sei die Behauptung für i schon bewiesen. S_{i+1} ist das Faserprodukt

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} S_{i+1} & \longrightarrow & S_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \kappa(p) & \longrightarrow & \prod_{s=1}^m \kappa(P_s), \quad p = p_i \in \text{Spec}(R). \end{array}$$

Wegen der Projektivität von $I_{i+1} := S_{i+1} \otimes_R I$ ist also auch I_{i+1} ein Faserprodukt (nach dem trivialen Teil des Satzes von Milnor):

$$\begin{array}{ccc} I_{i+1} & \longrightarrow & S_i \otimes_{S_{i+1}} I_{i+1} \cong I_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \kappa(p) \otimes_{S_{i+1}} I_{i+1} & \longrightarrow & \prod_{s=1}^m \kappa(P_s) \otimes_{S_{i+1}} I_{i+1} \end{array}$$

Nun ist I_i nach Voraussetzung frei zyklisch über $A_i := S_i \otimes_k A$, und $\kappa(\underline{p}) \otimes I_{i+1}$ ist Augmentationskern einer A^1 -Faserung über dem Körper $\kappa(\underline{p})$, nach dem obigen Argument also ebenfalls frei zyklisch über $\kappa(\underline{p}) \otimes_{S_{i+1}} A_{i+1}$. Also ist I_{i+1} als Modul isomorph zu einem Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc}
 I_{i+1} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & A_i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \kappa(\underline{p}) \otimes_{S_{i+1}} A_{i+1} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & (\prod \kappa(P_S)) \otimes_{S_{i+1}} A_{i+1} \\
 & \parallel & \\
 & & (\prod \kappa(P_S)) \otimes_{S_i} A_i \\
 & & \nearrow \cong \alpha \\
 & & (\prod \kappa(P_S)) \otimes_{S_i} A_i
 \end{array}$$

α ist ein Automorphismus des freien zyklischen Moduls $(\prod \kappa(P_S)) \otimes_{S_i} A_i$, d.h. Multiplikation mit einer Einheit u dieses Ringes. Wir wissen aber: $A_i \cong S_i^{[1]}$, d.h. $(\prod \kappa(P_S)) \otimes_{S_i} A_i \cong (\prod \kappa(P_S))[X]$, und in diesem Ring sind alle Einheiten konstant, d.h. $u \in \prod \kappa(P_S)^*$. Nach dem Satz von Milnor ist das Faserprodukt I_{i+1} (genau) dann frei zyklisch, wenn u die Form hat $u = \text{kan}(u_1) \cdot \text{kan}(u_2)$, wobei u_1 Einheit in

$\kappa(\underline{p}) \otimes_{S_{i+1}} A_{i+1}$, u_2 Einheit in A_i . Wir behaupten: Solche u_1, u_2 lassen sich finden, und zwar sogar $u_1 \in \kappa(\underline{p})^*$, $u_2 \in S_i^* \subset A_i$. Hierzu betrachten wir (**) und die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz für Pic :

$$\dots \longrightarrow \kappa(\underline{p})^* \times S_i^* \xrightarrow{\nabla} (\prod \kappa(P_S))^* \longrightarrow \text{Pic}(S_{i+1}) \longrightarrow \dots$$

S_{i+1} ist als endliche Erweiterung von R semilokal, und $\text{Pic}(S_{i+1})$ ist Null, d.h. ∇ surjektiv, $u \in \text{Bi}(\nabla)$, $u = \nabla(u_1, u_2)$. Nach Definition von ∇ ist also $u = \text{kan}(u_1) \cdot \text{kan}(u_2)$ wie verlangt.

Damit ist die eine Behauptung des Induktionsschritts gezeigt. Es ist noch zu zeigen $A_{i+1} \cong S_{i+1}^{[1]}$. Sei hierzu x ein freies Erzeugendes von I_{i+1} - wir behaupten, wie in [Gr]₂ p. 325, daß $A_{i+1} = S_{i+1}[x]$. Der Quotientenring K von S_{i+1} ist ein endliches Produkt von Körpern. Also ist $K \otimes_{S_{i+1}} A_{i+1} \cong K[X]$; x erzeugt auch $K \otimes_{S_{i+1}} I_{i+1}$, woraus folgt, daß x die Form $X-a$, $a \in K$, haben muß. Also ist x über K transzendent, und $K \otimes_{S_{i+1}} A_{i+1} = K[x]$. Sicher ist $S_{i+1}[x] \subset A_{i+1}$, und wir zeigen durch Induktion über $n = \deg_x(g)$, daß auch die andere Inklusion gilt (und damit sind wir fertig). Falls $g \in A_{i+1}$ eine Konstante ist, so gilt $g = \varepsilon(g) \in S_{i+1} \subset S_{i+1}[x]$. Sei die Behauptung für $\deg_x(g) \leq n$ schon bewiesen. Man kann jedes $g \in A_{i+1}$ mit Grad $n+1$ schreiben als $g_0 + s$, $g_0 \in I_{i+1}$, $s \in S_{i+1}$. Da $I_{i+1} = (x)$, ist $g_0 = x \cdot h$ mit $h \in S_{i+1}$, $\deg_x(h) \leq n$. Nach I.V. folgt $h \in S_{i+1}[x]$ und damit auch sofort $g \in S_{i+1}[x]$.

Hiermit ist Satz 1.2.1 für reduzierte Ringe bewiesen.

Sei R jetzt nicht mehr notwendig reduziert, aber noethersch. Weil für flache R -Algebren A gilt: $R_{\text{red}} \otimes_R A \cong R_{\text{red}}^{[1]}$ $\implies A \cong R^{[1]}$ (siehe etwa [As]₂ Lemma 4.3 oder [Gr]₂ p.326), und weil mit A auch $R_{\text{red}} \otimes_R A$ ein $\mathbb{A}^1$ -Faserraum ist, gilt die eben bewiesene "Dann, wenn"-Aussage von 1.2.1 auch für diesen allgemeineren Fall (wieder kann man R als lokal voraussetzen). Der allgemeine Beweis von "Nur dann, wenn" macht mehr Mühe.

Wir haben also einen noetherschen Ring R , für den R_{red} nicht seminormal ist, und wollen eine $\mathbb{A}^1$ -Faserung A über R konstruieren, die nicht symmetrisch ist. Da der reduzierte Fall schon erledigt ist, reicht es, folgenden Satz zu zeigen:

(1.2.2)SATZ. Jeder $\mathbb{A}^1$ -Faserraum B über R_{red} läßt sich nach R liften, d.h. es existiert ein $\mathbb{A}^1$ -Faserraum A über R mit $R_{\text{red}} \otimes_R A = B$.

N.B. Wenn B nicht symmetrisch ist, so kann es A auch nicht sein.

BEWEIS: Sei A zunächst irgendein Lifting von B als R -Algebra. Da sich die Primideale von R und R_{red} bijektiv entsprechen ($\bar{p} \mapsto \bar{p} := p/\text{Nil}(R)$) und $\kappa(p) = \kappa(\bar{p})$, ist A automatisch ein $A^{\uparrow}$ -Faserraum über R , wenn man nur zeigen kann, daß A vom endlichen Typ und flach ist. Da B vom endlichen Typ ist, gilt $A = R[x_1, \dots, x_n] + \text{Nil}(R) \cdot A$ ($x_i \in A$), und wenn man diese Gleichung oft genug in sich einsetzt, ergibt sich $A = R[x_1, \dots, x_n]$, denn $\text{Nil}(R)$ ist nilpotent. A ist also tatsächlich vom endlichen Typ. Die Flachheit erreicht man allerdings nur durch geschicktere Wahl von A . Wir werden sogar mehr zeigen: Nach Asanumas Ergebnis (siehe 1.1.5) ist B sogar stark projektiv, d.h. $S_B(M) \cong R_{\text{red}}^{[M]}$ für einen endlich erzeugten projektiven B -Modul M . Insbesondere ist B projektiv. Wir beweisen zwei Lemmata:

(1.2.3) LEMMA. Jede stark projektive R_{red} -Algebra B hat ein Lifting A mit der infinitesimalen Liftungseigenschaft. (D.h.: Für jede R -Algebra C und jedes quadratisch nilpotente Ideal $I \subset C$ ist $R\text{-Alg}(A, C) \longrightarrow R\text{-Alg}(A, C/I)$ surjektiv.)

(1.2.4) LEMMA. Wenn B (s.o.) projektiv ist und A ein Lifting von B mit der infinitesimalen Liftungseigenschaft, dann ist A selbst (über R) projektive Algebra.

Da projektive Algebren flach sind, folgt aus diesen beiden Lemmata und dem Vorhergehenden der Satz 1.2.2.

BEWEIS von 1.2.3 : Wir stützen uns auf die Arbeit [Mo-Wa]. Dort wird gezeigt: Wenn $A = R[Z_1, \dots, Z_m]/(h_1, \dots, h_n)$, dann ist A über R glatt, wenn die Matrix $(\partial h_i / \partial Z_j)$ über A rechtsinvertierbar ist. Dabei definieren die Autoren A als glatt über R , wenn A (i) die infinitesimale Liftungseigenschaft hat; (ii) endlich präsentiert über R ist. Aus dem Beweis geht hervor, daß die Endlichkeitsvoraussetzungen keinerlei Rolle spielen, es gilt also:

Wenn $A = R[Z_j]_{j \in J} / (h_i | i \in I)$, dann erfüllt A die infini-

tesimale Liftungseigenschaft, wenn die (unendliche) Matrix $J = (\partial h_i / \partial Z_j)_{i,j}$ rechtsinvertierbar ist. Bezeichne $\bar{}$ Reduktion mod $\text{Nil}(R)$. Dann ist J rechtsinvertierbar genau dann, wenn $\bar{J}$ rechtsinvertierbar ist. ($\text{Nil}(R)$ ist nilpotent, und man kann die Neumannsche Reihe verwenden.) Wir suchen jetzt eine geeignete Präsentation für B . Da $S_B(M) \cong R_{\text{red}}^{[s]}$ für ein $s \in \mathbb{N}$, und da $M \oplus B^{(\mathbb{N})} \cong B^{(\mathbb{N})}$ als B -Moduln, gilt:

$$\begin{aligned} B[X_i]_{i \in \mathbb{N}} &\cong S_B(B^{(\mathbb{N})}) \cong S_B(M \oplus B^{(\mathbb{N})}) \cong S_B(M)[Y_i]_{i \in \mathbb{N}} = \\ &= R_{\text{red}}^{[s]}[Y_i]_{i \in \mathbb{N}} \cong R_{\text{red}}[Z_j]_{j \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Wir geben dem Isomorphismus einen Namen: $p: B[X_i]_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} R_{\text{red}}[Z_j]_{j \in \mathbb{N}}$. Es ist $B \cong R_{\text{red}}[Z_j] / (g_i | i \in \mathbb{N})$ mit $g_i := p(X_i)$. Wir setzen:

$$A := R[Z_j]_{j \in \mathbb{N}} / (h_i | i \in \mathbb{N}), \text{ wobei } h_i \in R[Z_j] \text{ mit } \bar{h}_i = g_i.$$

Dann ist A auf alle Fälle ein Lifting von B als Algebra. Wir behaupten: $J = (\partial h_i / \partial Z_j)$ ist rechtsinvertierbar. Wie oben bemerkt, genügt es, die Rechtsinvertierbarkeit von $\bar{J} = (\partial g_i / \partial Z_j)$ zu zeigen. Hierzu betrachten wir den Isomorphismus $d\varphi: \Omega_{B[X_i] | R_{\text{red}}} \rightarrow \Omega_{R_{\text{red}}[Z_j] | R_{\text{red}}}$. Es gilt:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ d\varphi(dX_i) \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(X_i)}{\partial Z_j} \end{bmatrix}}_{\bar{J}} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ dZ_j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{Kettenregel}).$$

Die dX_i sind aber Basis für einen freien direkten Summanden von $\Omega_{B[X_i] | R_{\text{red}}}$, also sind die $d\varphi(dX_i)$ Basis für einen freien direkten Summanden von $\Omega_{R_{\text{red}}[Z_j] | R_{\text{red}}}$. Die dZ_j sind Basis von $\Omega_{R_{\text{red}}[Z_j] | R_{\text{red}}}$. Also definiert die Matrix J einen zerfallenden Monomorphismus, ist also rechtsinvertierbar, q.e.d.

BEWEIS von 1.2.4 : Wir wissen bereits, daß A als Algebra vom endlichen Typ ist. Sei F also ein Polynomring $R^{[n]}$, $p: F \rightarrow A$ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus. $\bar{A} (:= R_{\text{red}} \otimes_R A)$ ist isomorph zu B , also projektiv. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{p} & A \\
 \pi_F \downarrow & \nearrow p & \downarrow \pi_A \\
 \bar{F} & \xrightarrow{\bar{p}} & \bar{A} \\
 & \xleftarrow{i} &
 \end{array}$$

Ein i mit $\bar{p}i = \text{id}_{\bar{A}}$ existiert, da $\bar{A}$ projektive Algebra ist. Setze $f := i \pi_A$. Da $\text{Ke}(\pi_F)$ nilpotent ist, folgt aus der infinitesimalen Liftungseigenschaft von A durch Induktion sofort, daß man f zu einem $j: A \rightarrow F$ mit $\pi_F j = f$ liften kann. Wir hätten gern $pj = \text{id}_A$ (dann wäre A Retrakt von F und somit projektiv). Wir wissen aber nur: $\bar{p}i \pi_A = \bar{p}f = \bar{p} \pi_F j = \pi_A pj$, d.h. $\bar{p}j = \bar{p}i = \text{id}$. Also ist pj surjektiv (p.13, Zeile 6-8). Da A noethersch ist, muß der surjektive Endomorphismus pj schon ein Isomorphismus sein. Damit ist gezeigt, daß der Algebrenhomomorphismus p zerfällt, und deshalb ist A Retrakt von F , q.e.d.

N.B. Wir haben also viel mehr gezeigt als die Existenz eines flachen augmentierten Liftings A . Ein direkter "ökonomischer" Beweis liegt uns aber nicht vor. Man kann jetzt sogar zeigen: Ein flaches Lifting A ist sogar stark projektiv. Hierzu liftet man den Modul B^M und verwendet Lemma 4.3 aus [As]₂.

(1.2.5) BEMERKUNG. Nach 1.1.5 sind, zumindest für eine R_{red} -Algebra B , äquivalent: (i) B ist A^1 -Faserraum; (ii) B ist projektive R_{red} -Algebra in einer Variablen; (iii) B ist stark projektive R_{red} -Algebra in einer Variablen. Wenn eine (d.h. jede) Bedingung für B erfüllt ist, läßt sich nach obigem N.B. die Algebra B zu einem stark projektiven A liften. Es gilt sogar: Ein Lifting von B ist genau dann A^1 -Faserraum, wenn es flach ist. Für A sind also äquivalent:

- (i)' A hat die infinitesimale Liftungseigenschaft
- (ii)' A ist projektive R-Algebra
- (iii)' A ist stark projektive R-Algebra.

Wir vermuten, daß schon die Flachheit von A (i)' impliziert; d.h. im wesentlichen, daß 1.1.5 auch für nichtreduziertes R gilt. Dies können wir aber nicht beweisen.

(1.2.6) BEMERKUNG. Für noethersches reduziertes R ist Satz 1.2.1 auch ohne die Augmentiertheit von A vorzusetzen noch richtig. Die Existenz einer Augmentation muß man Asanumas Arbeit, d.h. also 1.1.5 entnehmen.

(1.3) $\mathbb{A}^n$ -Faserräume für $n > 1$, und projektive Algebren in mehr als einer Variablen.

Wie schon zu Anfang des Kapitels gesagt, können wir hier keine auch nur annähernd vollständige Theorie entwickeln. Insbesondere ist unbekannt, wie sich im allgemeinen die Begriffe " $\mathbb{A}^n$ -Faserraum" und "projektive Algebra in n Variablen" zueinander verhalten. Für $n = 2$ ist wenigstens eine Implikation (halbwegs) zu retten. Dies liegt an folgendem Satz:

(1.3.1) SATZ. Sei k ein perfekter Körper und A eine projektive k -Algebra in 2 Variablen. Dann ist $A = k^{[2]}$.

Wir geben sofort die naheliegende Folgerung an:

(1.3.2) FOLGERUNG. Sei R eine noethersche $\mathbb{Q}$ -Algebra. Dann ist jede projektive R -Algebra in zwei Variablen ein $\mathbb{A}^2$ -Faserraum über R .

($\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R A$ ist nach 1.1.3 wieder projektiv in zwei Variablen, und $\text{char}(\kappa(\mathfrak{p})) = 0$, so daß 1.3.1 anwendbar ist.)

BEWEIS von 1.3.1 : In $[Ka]_1$ wird bewiesen: Falls $K|k$ eine separable Körpererweiterung ist und A eine k -Algebra mit $K \otimes_k A \cong K^{[2]}$, dann war bereits $A \cong k^{[2]}$. Für uns bedeutet dies, da k perfekt ist, daß wir k als algebraisch abgeschlossen voraussetzen dürfen.

Wir zitieren aus $[R]_2$ das folgende "Theorem 3":

Sei $A \subset k^{[2]}$ eine reguläre k -Algebra der Krulldimension zwei vom endlichen Typ, faktoriell, und sei $\text{Quot}(k^{[2]})$ über $\text{Quot}(A)$ separabel. Dann ist $A \cong k^{[2]}$.

(Dieses Theorem trägt die Hauptlast des Beweises von 1.3.1.)

Wir verifizieren, daß unser A (bis auf Isomorphie) die Voraussetzungen des Theorems erfüllt.

Da A projektiv ist, ist A vom endlichen Typ und (etwa nach $[Co]$ oder $[Gr]_1$) regulär und faktoriell. Da nach 1.1.2 $\text{tr.deg}_k(A) = 2$, ist $\dim(A) = 2$. Es bleibt zu zeigen: A läßt sich derart in $k^{[2]}$ einbetten, daß $\text{Quot}(k^{[2]})$ über $\text{Quot}(A)$ separabel wird. Hierzu muß man eine Einbettung $j: A \rightarrow k^{[2]}$ geschickt genug wählen. Wir folgen einer Andeutung in $[R]_2$: Nach Voraussetzung gibt es ein n , sodaß A Retrakt von $C := k^{[n]}$ ist, also:

$$A \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} A \quad \text{mit } p \circ i = \text{id}_A.$$

Sei ε eine Augmentation von A , $\varepsilon' = \varepsilon \circ p$. Weil $\Omega_A \xrightarrow{di} A \otimes_k \Omega_C$ nach $[Gr]_1$ 2.1.7 ein zerfallender Mono ist, ist $k \otimes_{di}: k \otimes_A \Omega_A \rightarrow k \otimes_C \Omega_C \cong \bigoplus_{i=1}^n k \cdot dX_i$ injektiv. $k \otimes_A \Omega_A$ hat die k -Dimension 2 (denn Ω_A ist A -projektiv vom Rang 2, vgl. loc.cit.). Also gibt es $n-2$ linear unabhängige Elemente $Y_1, \dots, Y_{n-2} \in k\text{-span}(X_1, \dots, X_n)$, sodaß $\text{Bi}(k \otimes_{di}) \oplus k\text{-span}(dY_1, \dots, dY_{n-2}) = k\text{-span}(dX_1, \dots, dX_n)$.

Setze nun $B := C/(Y_1, \dots, Y_{n-2})$; ε_B sei die von ε' induzierte Augmentation von B . (O.E. ist $\varepsilon'(X_i) = 0$.) Betrachte $j: A \xrightarrow{\varepsilon} C \rightarrow B$. Dann wird

$$k \otimes dj: k \otimes_A \Omega_A \rightarrow k \otimes_B \Omega_B = (k \otimes_C \Omega_C) / (dY_1, \dots, dY_{n-2})$$

ein Isomorphismus.

Bezeichne $\mathfrak{m}$ den Kern von $*$. Nach [Gr]₁ p.25 oder [Ma] kann man die letzte Zeile umschreiben zu

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{E}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{E}}^2 \xrightarrow{\cong} \mathfrak{m}_{\mathfrak{E}_B}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{E}_B}^2,$$

wobei die Abbildung von j induziert wird. Also ist $\text{Spec}(j)$ im Punkt $\mathfrak{m}$ étale (vgl. [Gt]₃ I 4.4): j induziert einen Isomorphismus zwischen der $\mathfrak{m}_{\mathfrak{E}}$ -adischen Komplettierung von A und der $\mathfrak{m}_{\mathfrak{E}_B}$ -adischen Komplettierung von B , und beide Restklassenkörper sind k . Da j auf den Komplettierungen einen Isomorphismus induziert, ist j sicher injektiv.

"Étale" ist nach loc.cit. I 4.5 eine offene Eigenschaft. Deshalb ist $\text{Spec}(j)$ auch im generischen Punkt étale, d.h. die $\text{Quot}(A)$ -Algebra $\text{Quot}(A) \otimes B$ ist über $\text{Quot}(A)$ separabel. Die betreffende Algebra ist integer, und wegen der Injektivität von j endlich über $\text{Quot}(A)$ (Transzendenzgrad!). Also ist sie selbst ein Körper, stimmt also mit $\text{Quot}(B)$ überein, und $\text{Quot}(B)$ ist über $\text{Quot}(A)$ separabel. Offensichtlich ist $B \cong k^{[2]}$!

Die Folgerung 1.3.2 nützt uns insofern wenig, als über A^2 -Faserräume (außer wenn R ein perfekter Körper ist) nichts Definitives bekannt ist. Allerdings gibt es (vgl. Einleitung!) eine noch nicht vollständig bewiesene Vermutung von Kambayashi:

Vermutung (K): Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper $k = \overline{k}$ der Charakteristik Null. Sei ferner A ein A^2 -Faserraum über R . (D.h. also im einzelnen: A ist flach und vom endlichen Typ über R ; $k \otimes A \cong k^{[2]}$; $\text{Quot}(R) \otimes_R A = \text{Quot}(R)^{[2]}$.) Dann ist $A \cong R^{[2]}$. (Siehe [Ka]₂.)

BEMERKUNGEN: a) Nach [Bá] kann man, ohne etwas am mathematischen Gehalt von (K) zu ändern, zusätzlich fordern, daß R henselsch (oder auch gleich vollständig) ist.

b) Es ist unklar, ob man eine stärkere Vermutung bekommt, wenn man in (K) die Voraussetzung, daß k algebraisch abgeschlossen ist, streicht. Die Voraussetzung über die Charakteristik scheint notwendig zu sein, aber man weiß es nicht ganz sicher.

Falls (K) richtig ist, hat man folgendes schwächere Pendant zu Satz 1.2.1:

(1.3.3) SATZ : Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null, R eine reduzierte k -Algebra vom endlichen Typ. Wir betrachten folgende Aussagen:

- (i) R ist seminormal
- (ii) Alle projektiven R -Algebren in 2 Var. sind symmetrisch
- (iii) Alle A^2 -Faserungen über R sind symmetrisch.

Dann gilt $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ allgemein. Falls (K) gilt und $\dim(R) \leq 1$, dann sind die drei Aussagen äquivalent.

BEWEIS: $(iii) \Rightarrow (ii)$ gilt nach Folgerung 1.3.2 .

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei R nicht seminormal. Nach $[Gr]_2$ Cor.4.4 gibt es dann eine projektive R -Algebra B in einer Variablen, die nicht invertierbar ist, d.h. $B \otimes_R C \neq R^{[n]}$ für alle $C \in R\text{-Alg}$. Dann kann $A := B^{[1]}$ keine symmetrische Algebra über R sein, sonst wäre B doch invertierbar. Aus der Definition folgt, daß A eine projektive R -Algebra in zwei Variablen ist.

Sei nun $\dim(R) \leq 1$, und gelte (K). Wir setzen voraus, daß (i) gilt, und beweisen (iii). Wie schon oft, kann man nach [Ba-Cn-Wr] annehmen, daß R lokal, und im wesentlichen vom endlichen Typ ist. Falls R normal ist, dann ist es ein diskreter Bewertungsring; der Restklassenkörper kann nach dem Hilbertschen Nullstellensatz nur k sein. Also ist nach Vermutung (K) $A \cong R^{[2]}$ für jede A^2 -Faserung A über R , und man ist fertig. Es bleibt nur noch, den allgemeinen Fall (R lokal seminormal im wesentlichen vom endlichen Typ) auf diesen Spezialfall zurückzuführen, und dies geht mit der üblichen Methode.

Sei S die Normalisierung von R (S ist endlich über R), und $\underline{c}$ der Konduktor von S nach R . O.E. sei $\underline{c} \neq R$ (sonst wäre $R = S$). Dann sind $R/\underline{c}$ und $S/\underline{c}$ artinsch (= nulldimensional), denn $\underline{c}$ enthält wegen der Endlichkeit von S über R einen Nichtnullteiler. Der Restklassen-

Körper von $R/\underline{c}$ ist k , d.h. $[R/\underline{c}:k] < \infty$. Ferner ist wegen der Seminormalität von R der Ring $S/\underline{c}$ reduziert ([Tr], Lemma 1.3) und endlich über $R/\underline{c}$, also ist $S/\underline{c}$ bis auf Isomorphie ein (endliches) Produkt von Kopien von k . Gleiches gilt für die k -Unteralgebra $R/\underline{c}$. S ist normal und höchstens eindimensional, also ist die Behauptung für den Ring S schon bewiesen (s.o. und [Ba-Cn-Wr]). Weil S semilokal ist, gilt $S \otimes_R A \cong S^{[2]}$. Nach Satz 1.3.1 gilt auch $(R/\underline{c}) \otimes_R A = (R/\underline{c})^{[2]}$ (die Verallgemeinerung auf endliche Produkte von Körpern ist trivial). A ist als R -Modul flach, und R ist in kanonischer Weise ein Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/\underline{c} & \longrightarrow & S/\underline{c} \end{array}.$$

Durch Tensorieren bekommt man, daß auch A eine Faserprodukt-darstellung hat; wir setzen den linken unteren und den rechten oberen Eckterm gleich ein:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & S^{[2]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & (S/\underline{c})^{[2]} \\ & \searrow \varphi & \\ (R/\underline{c})^{[2]} & \longrightarrow & (S/\underline{c})^{[2]} \end{array},$$

wobei φ ein Automorphismus von $(S/\underline{c})^{[2]}$ ist, über den wir weiter nichts wissen. Wir behaupten $A \cong R^{[2]}$. Wie in allen derartigen Fällen reicht es zu zeigen, daß es $\alpha \in \text{Aut}_S(S^{[2]})$ und $\beta \in \text{Aut}_{R/\underline{c}}(R/\underline{c}^{[2]})$ gibt mit $\varphi = \bar{\alpha}\beta$. (Vergleiche den Beweis von 4.5 in [Gr]₂ oder von 1.2.1.) Wir setzen $\beta = \text{id}$, behaupten also sogar, daß man φ nach $\text{Aut}(S^{[2]})$ liften kann.

Nach dem Satz von VAN DER KULK ([Ku], [Ka]₂) wird $G := \text{Aut}_{S/\underline{c}}(S/\underline{c})[X, Y]$ von den folgenden Untergruppen erzeugt (wir unterschlagen wieder eine triviale Verallgemeinerung von Grundkörpern auf endliche Produkte von Körpern):

$$\Theta(S/\underline{c}) = \{\varphi \in G \mid \varphi(X) = X + a, \varphi(Y) = Y + b; a, b \in S/\underline{c}\}$$

$$\cong (S/\underline{c})^+ \times (S/\underline{c})^+ \quad (\text{Translationen});$$

$$\begin{aligned} H(S/\underline{c}) &= \{\varphi \in G \mid \varphi\left(\frac{X}{Y}\right) = M \cdot \left(\frac{X}{Y}\right); M \in GL(2, S/\underline{c})\} \\ &\cong GL(2, S/\underline{c}) \quad (\text{Lineare Automorphismen}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(S/\underline{c}) &= \{\varphi \in G \mid \varphi(X) = X, \varphi(Y) = Y + f(X); f(X) \in (S/\underline{c})[X]\} \\ &= ((S/\underline{c})^+)^{\mathbb{A}_1} \quad (\text{Elementare Automorphismen}). \end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, daß jedes Element einer dieser drei Gruppen zu einem Automorphismus von $S^{[2]}$ geliftet werden kann. Auch hier hat man drei analog definierte Untergruppen $\Theta(S)$, $H(S)$, $J(S)$, die aber im allgemeinen $\text{Aut}(S^{[2]})$ NICHT erzeugen (vgl. [Bñ]). Falls $\varphi \in \Theta(S/\underline{c})$, $\varphi\left(\frac{X}{Y}\right) = \left(\frac{X}{Y}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)$, so lifte man a, b zu α, β nach S ; man erhält das Lifting $\phi \in \Theta(S)$ mit $\phi\left(\frac{X}{Y}\right) = \left(\frac{X}{Y}\right) + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Genauso trivial ist der Fall $\varphi \in J(S/\underline{c})$: hier lifte man das ganze Polynom f zu $F \in S[X]$. (Für Skeptiker: Das Inverse von $(X \mapsto X, Y \mapsto Y + F(X))$ ist $(X \mapsto X, Y \mapsto Y - F(X))$.)

Für den dritten Fall reicht es festzustellen, daß $GL(2, S) \longrightarrow GL(2, S/\underline{c})$ surjektiv ist. Dies ist (wegen eines Determinantenarguments) zur Surjektivität von $S^* \longrightarrow (S/\underline{c})^*$ äquivalent. Letzteres ist tatsächlich der Fall, denn $\underline{c} \subset \text{Ra}(R)$, weil R lokal war, und $\text{Ra}(R) \subset \text{Ra}(S)$, weil S über R endlich ist, also $\underline{c} \subset \text{Ra}(S)$. Q.E.D.

(1.3.4) BEMERKUNG. Der obige Beweis von (i) $\implies$ (iii) zeigt für lokales R unter den angegebenen Voraussetzungen: Jede $\mathbb{A}^2$ -Faserung A über R ist Faserprodukt eines Polynomrings über S und eines Polynomrings über $R/\underline{c}$. Nach [As]₂, Thm. 3.15, ist A also stark projektiv. (Wieder muß man die technische Bedingung 2.6 in loc.cit. nachprüfen. Dabei braucht man, daß S semilokal und Produkt von Dedekindringen ist, also $\underline{c}$ in S Hauptideal. In (Γ_3) kann man $t=1$ setzen.) Wie im Beweis von 1.1.5 eliminiert man dann die Voraussetzung, daß R lokal ist, und erhält unter der Voraussetzung (K):

Sei R eine reduzierte k -Algebra vom endlichen Typ über dem Körper k , $k = \overline{k}$, $\text{char}(k) = 0$, $\dim(R) \leq 1$. Dann sind

$\mathbb{A}^2$ -Faserungen und projektive Algebren in zwei Variablen über R ein und dasselbe.

(1.3.5) BEMERKUNG. Ich vermute, daß (i) $\Rightarrow$ (iii) falsch ist für $\dim(R) \geq 2$, habe jedoch kein Gegenbeispiel. Wenn man zu $\mathbb{A}^3$ -Faserungen und Variablenzahl 3 übergeht, gibt es aber Gegenbeispiele, sogar mit Grundringen R , die weit mehr als seminormal sind:

(1.3.6) BEISPIEL. Es gibt einen vierdimensionalen faktoriellen Ring R (vom endlichen Typ über einem frei wählbaren Körper k endlicher Charakteristik), und eine projektive R -Algebra A in drei Variablen, die keine symmetrische Algebra über R ist. A ist überdies ein $\mathbb{A}^3$ -Faserraum.

(N.B. Die Voraussetzung über die endliche Charakteristik stört. Sie läßt sich auf Kosten der Variablenzahl vermeiden, s.u.)

KONSTRUKTION des Beispiels: Die Idee stammt von J. Yanik $[Y]_2$, der sich in einem Punkt auf $[Gr]_2$ stützt. Man macht folgenden Ansatz:

(1.3.7) PROPOSITION. Sei P endlich erzeugt projektiv über $R^{[i]}$ vom konstanten Rang n ($i, n \in \mathbb{N}$), wobei R ein beliebiger noetherscher Ring ist. Dann ist $B := S_{R^{[i]}}(P)$ als R -Algebra (!!) projektiv in $i+n$ Variablen.

BEWEIS: Für geeignetes N ist P als Modul Retrakt von $(R^{[i]})^N$, also ist B Retrakt von $(R^{[i]})^{[N]}$ als $R^{[i]}$ -Algebra, a fortiori also Retrakt von $R^{[i+N]}$ als R -Algebra.

Deshalb ist B R -projektiv. Sei e' die Augmentation $B \xrightarrow{P \mapsto 0} R^{[i]} \xrightarrow{e} R$ (e annulliere die Variablen von $R^{[i]}$).

Man berechnet: ${}_R T(B, e') = \text{Ke}(e') / \text{Ke}(e')^2 \cong \text{Ke}(e) / \text{Ke}(e)^2 \oplus \oplus (R \otimes P)$, woraus mit 1.1.3 auch die Behauptung über die Variablenzahl folgt.

Man zeigt jetzt

(1.3.8) LEMMA ([Y]₂, 2.4, 2.5). Seien R, P, B wie oben. Dann gilt

$$R^{[i]} \otimes_B \Omega_{B|R} \cong (R^{[i]})^i \oplus P$$

als $R^{[i]}$ -Moduln.

BEWEIS: Die Sequenz

$$(1) \quad 0 \longrightarrow B \otimes_{R^{[i]}} \Omega_{R^{[i]}|R} \xrightarrow{j} \Omega_{B|R} \longrightarrow \Omega_{B|R^{[i]}} \longrightarrow 0$$

ist exakt. (Die Rechtsexaktheit ist die sogenannte "first exact sequence", siehe z.B. [Ma] Thm. 57. Die Injektivität von j ist klar, wenn B frei ist, denn dann ist B ein Polynomring über $R^{[i]}$. Durch ein Lokalisierungsargument folgt der allgemeine Fall.)

Sei f die $R^{[i]}$ -Augmentation $B \rightarrow R^{[i]}$, die durch $P \mapsto 0$ induziert wird. Dann hat man nach [Ma] einen kanonischen Epimorphismus

$$(P \cong) \quad \text{Ke}(f)/\text{Ke}(f)^2 \longrightarrow R^{[i]} \otimes_{R^{[i]}} \Omega_{B|R^{[i]}}.$$

Durch Zurückführen auf den Fall " P frei" sieht man wieder, daß es sich sogar um einen Isomorphismus handelt. Nun tensorieren wir (1) mit $R^{[i]}$ über B . Die Exaktheit bleibt erhalten, denn $\Omega_{B|R^{[i]}}$ ist, etwa nach [Y]₂ 2.3, B -projektiv:

$$0 \longrightarrow \Omega_{R^{[i]}|R} \longrightarrow R^{[i]} \otimes_B \Omega_{B|R} \longrightarrow P \longrightarrow 0.$$

Diese Folge zerfällt und liefert (wegen $\Omega_{R^{[i]}|R} \cong (R^{[i]})^i$) die Behauptung.

Jetzt können wir das Beispiel konstruieren. Nach [We], Thm. 3.3, gibt es einen vierdimensionalen faktoriellen Ring R vom endlichen Typ über k und einen projektiven $R^{[1]}$ -Modul P vom Rang 2, der nicht stabil isomorph zu einem von R erweiterten Modul ist ($"NK_0(R) \neq 0"$). Wenn man also $A := S_{R^{[1]}}(P)$ setzt, bekommt man nach 1.3.7 eine projektive R -Algebra in drei Variablen. Wir behaupten: A ist obendrein eine A^3 -Faserung. Sei hierzu $p \in \text{Spec}(R)$.

$$\kappa(\underline{p}) \otimes_R A \cong \kappa(\underline{p})^{[1]} \otimes_R^{[1]} S_{R^{[1]}(P)} \cong S_{\kappa(\underline{p})^{[1]}}(\kappa(\underline{p})^{[1]} \otimes_{R^{[1]}} P).$$

Nun ist aber $\kappa(\underline{p})^{[1]}$ ein Hauptidealring, der projektive Modul $\kappa(\underline{p})^{[1]} \otimes_{R^{[1]}} P$ also frei, d.h. letztere Algebra ist ein Polynomring in zwei Variablen über $\kappa(\underline{p})^{[1]}$ und demnach isomorph zu $\kappa(\underline{p})^{[3]}$, q.e.d.

Wir zeigen jetzt mit einem Argument aus $[Gr]_2$ (4.1, 4.2), daß A nicht invertierbar (und a fortiori nicht symmetrisch) sein kann. Sei $A \otimes_R B \cong R^{[N]}$; seien e und f Augmentationen von A bzw. B . Dann ist $\Omega_{A \otimes B | R}$ frei vom Rang N über $A \otimes B$. Andererseits hat man:

$$\Omega_{A \otimes B | R} \cong \Omega_{A | R} \otimes_R B \oplus A \otimes_R \Omega_{B | R}.$$

Durch Anwenden von $(A \otimes_R R) \otimes_{(1 \otimes f)} -$ bekommt man:

$$\Omega_{A | R} \otimes_R R \oplus A \otimes_R (\Omega_{B | R} \otimes_R R) \text{ ist } A \otimes_R R\text{-frei.}$$

Der zweite Summand ist offenbar von einem R -Modul erweitert. Also ist $\Omega_{A | R} \cong \Omega_{A | R} \otimes_R R$ stabil erweitert von R , also ist auch $R^{[1]} \otimes_A \Omega_{A | R}$ stabil erweitert von R . Nach Lemma 1.3.8 ist aber $R^{[1]} \otimes_A \Omega_{A | R} \cong R^{[1]} \oplus P$, und P ist nach Konstruktion nicht stabil erweitert von R - der gewünschte Widerspruch. Damit ist das Beispiel konstruiert.

Jetzt wollen wir uns noch von der endlichen Charakteristik befreien:

(1.3.9) BEMERKUNG. Man kann eine faktorielle $\mathbb{C}$ -Algebra R vom endlichen Typ finden, über welcher es eine projektive Algebra A in vier Variablen gibt, die nicht symmetrische Algebra über R ist. (Wieder ist A auch eine A^4 -Faserung.)

BEWEIS: Nach [We], Thm. 3.6, ist z.B. $R := \mathbb{C}[x, y, s, t] / (x^2 - y^3 - st)$ eine faktorielle $\mathbb{C}$ -Algebra mit $NK_0(R) \neq 0$, d.h.: Es existiert ein endlich erzeugter projektiver $R^{[1]}$ -Modul P , der nicht stabil von R erweitert ist. Ohne Einschränkung

sei $\text{rk}(P) \geq 3$. Nach dem ersten "Theorem von Eisenbud-Evans" (bewiesen von Plumstead, siehe [Pl] p.3) hat P die Form $P' \oplus F$, F über $R^{[1]}$ frei, $\text{rk}(P') = 3$. (R hat die Dimension drei.). Mit R und P' führt man die Konstruktion von 1.3.6f. durch und erhält eine nichtinvertierbare projektive R -Algebra $A = S_{R^{[1]}}(P')$, denn mit P ist auch P' nicht stabil von R erweitert. Daß die Variablenzahl jetzt 4 ist, liegt daran, daß P' den Rang 3 hat (P oben hatte den Rang 2). Genauso sieht man, daß A eine A^4 -Faserung ist.

N.B. Wenn man ohne "Eisenbud-Evans" auskommen will, kann man aus einem älteren Satz von Serre immerhin folgern $P = P' \oplus \text{frei}$, $\text{rk}(P') \leq 4$. Man erhält also i.a. ein Gegenbeispiel mit Variablenzahl fünf.

(1.4) Invertierbare Algebren und stabil freie Algebren (Kürzungsproblem)

Eine stabil freie Algebra A (d.h. $A^{[r]} \cong R^{[n]}$) ist offenbar invertierbar, und invertierbare R -Algebren sind projektiv. In den vorigen Abschnitten haben wir einige positive Aussagen über projektive R -Algebren bewiesen, die natürlich insbesondere auf invertierbare und stabil freie Algebren zutreffen. Zur Struktur von invertierbaren Algebren kann man aber manchmal noch genauere Aussagen machen. Zunächst gilt nach 1.2.1 und 1.2.2 folgender Satz (der im wesentlichen das Hauptergebnis von $[Gr]_2$ ist):

(1.4.1) SATZ. Sei R noethersch. Genau dann sind alle projektiven R -Algebren in einer Variablen symmetrisch, wenn R_{red} seminormal ist.

Dieser Satz hat ein Pendant für invertierbare bzw. stabil freie Algebren in einer Variablen. Interessant dabei ist, daß die Aussagen "invertierbare R -Algebren sind symmetrisch"

und "stabil freie R-Algebren sind symmetrisch" für den Fall einer Variablen gleich stark sind. Dies scheint kein Zufall zu sein. Asanuma hat in $[As]_2$ eine schon in $[Gr]_2$ ausgesprochene Vermutung bewiesen: Für einen noetherschen lokalen Ring R und eine R -Algebra A in einer Variablen sind die Aussagen " A invertierbar" und " A stabil frei" äquivalent. (N.B. Man muß hier R als lokal voraussetzen. Alle symmetrischen Algebren von nicht stabil freien, projektiven R -Moduln sind nämlich invertierbar, nicht aber stabil frei.)

(1.4.2) SATZ. Sei R reduziert. Dann sind äquivalent:

- i) R ist p -seminormal für alle Primzahlen p (s.unten);
- ii) Alle invertierbaren R -Algebren in 1 Var. sind symmetrisch;
- iii) Alle stabil freien R -Algebren in 1 Var. sind symmetrisch;
- iv) Für alle R -Algebren A gilt: $A^{[1]} \cong R^{[2]} \implies A \cong R^{[1]}$.

BEWEIS: i) $\Rightarrow$ ii) gilt nach $[Gr]_2$, Remark 4.7 und Thm. 4.6 .

ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) ist trivial.

iv) $\Rightarrow$ i): Dies ist Theorem 3.13 in $[As]_1$. Wir müssen bloß prüfen, daß Asanumas Bedingung " R is an F-ring" die p -Seminormalität von R nach sich zieht. Daß R ein F-Ring ist, heißt per def.: Für jede reduzierte Ringerweiterung $R \subset T$ und jedes $x \in T$ mit $x^2, x^3, nx \in R$ (für ein $n \in \mathbb{N} - 0$) folgt $x \in R$. Wenn man für T die Seminormalisierung von R einsetzt und p für n , folgt die definierende Bedingung für p -Seminormalität. Q.E.D.

Über stabil freie Algebren in mehreren Variablen können wir genausowenig sagen wie über projektive Algebren. Wir betonen noch einmal, daß Satz 1.3.1 für stabil freie Algebren genau das Cancellation Theorem von Miyanishi-Fujita-Sugie-Russell ist. Unser Satz 1.3.1 für projektive Algebren ist nur eine leichte Verallgemeinerung.

2. Radizieller Abstieg und inseparable Formen der

affinen Geraden

Die ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels sind technischer Natur. Sie werden in den folgenden beiden Abschnitten über Formen von A^1 und im dritten Kapitel verwendet. Das Grundproblem ist für den Moment folgendes:

Sei $K|k$ eine einfache rein inseparable Körpererweiterung der Höhe Eins. Dies heißt: $\text{char}(k) = p$, $K = k(\alpha)$ mit $\alpha^p \in k$, $\alpha \notin k$. Bekanntlich ist dann $[K:k] = p$. Es geht jetzt um treuflachen Abstieg bezüglich $K|k$, d.h.: Uns liegt eine K -Algebra A (oder auch ein K -Schema X) vor, und wir suchen alle k -Algebren B (respektive k -Schemata Y), die mit K über k tensoriert (bis auf Isomorphie) wieder A (respektive X) ergeben. Zum Beispiel in [Kn-O] steht, wie man alle solchen Algebren B mit Hilfe einer geeigneten ersten Kohomologiegruppe einer p -Liealgebra klassifizieren kann. Diese Kohomologietheorie ist unbequem, und es geht in diesem Abschnitt nur darum, die Abstiegstheorie etwas anders zu formulieren, wodurch sie in einigen Fällen leichter benutzbar wird. Das wichtigste allgemeine Ergebnis ist dabei folgendes:

Für $A = K \otimes_k B_0$ werden die verzerrten Formen der Algebra B_0 , i.e. die k -Algebren B mit $K \otimes_k B \cong K \otimes_k B_0$, klassifiziert durch die Menge

$$\{ D \in \text{Der}_K(A, A) \mid D^{[p]} = 0 \} / \sim,$$

wobei $D_1 \sim D_2$: Es gibt $\varphi \in \text{Aut}_K(A)$ mit $D_2 = \varphi^{-1} D_1 \varphi + \varphi^{-1} \partial(\varphi)$.

Hierbei ist $D^{[p]}$ eine Art p -ter Potenz von D in der Liealgebra $\text{Der}_K(A, A)$, und $\partial(\varphi) := \partial\varphi - \varphi\partial$, wobei ∂ die durch $\partial\alpha = 1$ definierte kanonische k -Derivation von K ist (und auch die Fortsetzung davon auf $K \otimes_K B_0 = A$).

Im Falle $A = K[T]$ kennt man die Derivationen D ganz genau, und die Bedingung $D^{[p]} = 0$ kann man im Einzelfall nachprüfen. Auch die Automorphismen φ hat man in der Hand. Ansonsten enthält der erste Abschnitt keine wesentlich neuen Ergebnisse.

(2.1) Ein modifizierter Amitsurkomplex; Kozyklen und Derivationen

Sei im Folgenden stets k ein Körper der Charakteristik p , $K = k(\alpha)$ mit $\alpha^p = a \in k, \alpha \notin k$. Es ist $K \cong k[X]/(X^p - a)$, und selbstverständlich ist K über k treuflach. Die allgemeine treuflache Abstiegstheorie (siehe etwa [Kn-0]) wird vorausgesetzt.

(Der folgende Formalismus ließe sich auch für eine einfache rein inseparable Körpererweiterung $K|k$ vom Grad $q = p^n$ durchführen.)

Wir betrachten den Standard-Amitsurkomplex von K über k ($\otimes = \otimes_K$!):

$$k \subset K \xrightarrow[\varepsilon_1]{\varepsilon_0} K \otimes K \xrightarrow[\varepsilon_2]{\varepsilon_1} K \otimes K \otimes K \dots,$$

wobei ε_i und ε'_i hinter der i -ten Position " $\otimes 1$ " einschiebt, z.B. $\varepsilon'_1(x \otimes y) = x \otimes 1 \otimes y$.

Dieser Amitsurkomplex ist bekanntlich exakt, das heißt:

$$k \subset K \xrightarrow{\varepsilon_0 - \varepsilon_1} K \otimes K \xrightarrow{\varepsilon'_0 - \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2} K \otimes K \otimes K$$

ist eine exakte Folge von k -Vektorräumen.

Wir wollen jetzt gewisse Identifizierungen vornehmen. Zunächst betrachten wir $K \otimes K$. Wir behaupten, daß es einen kanonischen K -Isomorphismus $j: K \otimes K \rightarrow K[t] := K[T]/(T^P)$ gibt mit $j(\alpha \otimes 1) = \alpha$, $j(1 \otimes \alpha - \alpha \otimes 1) = t$. j erhält man als Komposition folgendermaßen: $K \otimes K \cong K \otimes k[X_2]/(X_2^P - \alpha) \cong K[X_2]/(X_2^P - \alpha) \cong_{(X_2 = X_2 - \alpha)} K[X_3]/(X_3^P) \cong K[t]$.

In analoger Manier bekommt man einen kanonischen Isomorphismus $j': K \otimes K \otimes K \rightarrow K[t, t'] := K[T, T']/(T^P, T'^P)$ (N.B. $tt' \neq 0!$), wobei gilt:

$$j'(\alpha \otimes 1 \otimes 1) = \alpha;$$

$$j'(1 \otimes \alpha \otimes 1 - \alpha \otimes 1 \otimes 1) = t \quad (\text{d.h. } j' \varepsilon'_2 = j, \text{ bis auf die kanonische Inklusion } K[t] \subset K[t, t']);$$

$$j'(1 \otimes 1 \otimes \alpha - \alpha \otimes 1 \otimes 1) = t'.$$

Wir schreiben jetzt den Amitsurkomplex für diese isomorphen Kopien auf und untersuchen, was aus den ε_i und ε'_i wird. Genauer gesagt, hat man ein kommutatives Diagramm mit wohlbestimmten η_i und η'_i :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{(A)} & k & \subset & K & \xrightarrow[\varepsilon_1]{\varepsilon_0} & K \otimes K & \xrightarrow[\varepsilon'_1]{\varepsilon'_0} K \otimes K \otimes K \\ & \parallel & & \parallel & & \downarrow j & \downarrow j' \\ \text{(MA)} & k & \subset & K & \xrightarrow[\eta_1]{\eta_0} & K[t] & \xrightarrow[\eta'_1]{\eta'_0} K[t, t']. \end{array}$$

Hierbei gilt im einzelnen:

$$\eta_1 = j \varepsilon_1 = \text{kanonische Einbettung } K \subset K[t];$$

$$\eta_0 \text{ ist der durch } \alpha \mapsto \alpha + t \text{ wohldefinierte } k\text{-Algebrenhomomorphismus.}$$

Analog gilt:

$$\eta'_2 = j^{-1} \varepsilon'_2 \quad j' = \text{kanonische Einbettung von } K[t] \subset K[t, t'] (\text{s.o.});$$

$$\eta'_1(\alpha) = \alpha, \text{ und } \eta'_1 \text{ ist der durch } \eta'_1(t) = t' \text{ wohldefinierte}$$

K-Algebrenhomomorphismus ;

η'_0 ist durch $\eta'_0(\alpha) = \alpha + t$, $\eta'_0(t) = t' - t$ (wohl) definiert.

Wir hoffen, jetzt mit dem Komplex (MA) besser rechnen zu können. Für jede k-Algebra B bekommt man den induzierten Komplex $B \otimes_K (MA)$:

$$B \subset B_K \xrightarrow[\eta_0]{\eta_1} B_K[t] \xrightarrow[\eta'_0]{\eta'_1} B_K[t, t'].$$

Hierbei hat man $K \otimes B$ mit B_K abgekürzt und (etwas mißbräuchlicherweise) die Abbildungen $B \otimes \eta_i^{(1)}$ wieder $\eta_i^{(1)}$ genannt. Mit ähnlich vereinfachter Notation bekommt man ein Diagramm

$$\text{Aut}_K(B) \subset \text{Aut}_K(B_K) \xrightarrow[\eta_1]{\eta_0} \text{Aut}_K[t](B_K[t]) \xrightarrow[\eta'_1]{\eta'_0} \text{Aut}_K[t, t'](B_K[t, t']).$$

Hierbei ist z.B. $\eta_0(\varphi)$ der aus φ durch Tensorieren längs $\eta_0 = B \otimes \eta_0$ gewonnene Automorphismus von $B_K[t]$, d.h. $\eta_0 \circ \varphi = \eta_0(\varphi) \cdot \eta_0$, für $\varphi \in \text{Aut}_K(B_K)$.

Die Theorie des treuflachen Abstiegs sagt nun: Die verzerrten Formen von B unter $K|k$ stehen in bijektiver Korrespondenz zu $H^1(K|k, \underline{\text{Aut}} B)$, und diese letztere Menge ist nach unserer Konstruktion bijektiv bezogen auf folgende Menge:

$$\{\varphi \in \text{Aut}_K[t](B_K[t]) \mid \eta_1(\varphi) = \eta_2(\varphi) \cdot \eta_0(\varphi)\} / \sim,$$

wobei $\varphi \sim \psi \iff \exists \tau \in \text{Aut}_K(B_K)$ mit $\psi = \eta_1(\tau) \cdot \varphi \cdot \eta_0(\tau)^{-1}$.

Obige geschweifte Klammer nennen wir wieder Menge der 1-Kozyklen (wie für den normalen Amitsurkomplex). Diese sollen jetzt ausgerechnet werden. Hierzu einige Notationen.

(2.1.1) DEF. Die kanonische k-Derivation ∂ von K in sich ist die durch $a \mapsto 1$ bestimmte k-Derivation. Es gilt für $f \in k[X]$: $\partial(f(\alpha)) = f'(\alpha)$.

Für jede k-Algebra B bezeichnen wir die B-Derivation $\partial \otimes B$ von $K \otimes B = B_K$ wieder mit ∂ , wenn Verwechslungen nicht wahrscheinlich sind.

(2.1.2) NOTATION. Die Elemente von $\text{Der}_K(B_K)$ (= Menge der K -Derivationen von B_K in sich) werden mit $D, D_1, \dots$ bezeichnet. Wir setzen $\tilde{D} := D + \partial$ etc. (Warnung: $\tilde{D}$ ist keine K -Derivation, sondern nur eine k -Derivation.)

Jetzt definieren wir symbolische Potenzen von D (ähnlich wie in p -Liealgebren) sowie die symbolische Exponentialreihe:

$$\begin{aligned} D^{[0]} &:= \text{id} \in \text{End}_K(B_K) ; \\ D^{[i+1]} &:= D \cdot D^{[i]} + \partial(D^{[i]}), \end{aligned}$$

wobei für jedes $f \in \text{End}_K(B_K)$ $\partial(f) := \partial f - f \partial$ gesetzt sei. (N.B. Mit f ist auch $\partial(f)$ eine $(K-)$ Derivation, vgl. [Kn-O].)

Die symbolische exp-Reihe ist dann wie folgt in $\text{Hom}_K(B_K, B_K[t]) = \text{End}_{K[t]}(B_K[t])$ definiert:

$$[\exp](tD) := \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^i}{i!} D^{[i]}.$$

Der springende Punkt in unserer Theorie ist der folgende Zusammenhang zwischen Kozyklen $\varphi \in \text{Aut}_{K[t]}(B_K[t])$ und Derivationen $D \in \text{Der}_K(B_K)$:

(2.1.3) SATZ. Die $[\exp]$ -Reihe definiert eine Bijektion zwischen der Menge aller $D \in \text{Der}_K(B_K)$ mit $D^{[p]} = 0$ und der Menge der Kozyklen $\varphi \in \text{Aut}_{K[t]}(B_K[t])$. Insbesondere ist $[\exp](tD)$ für jedes solche D ein Automorphismus von $B_K[t]$.

BEWEIS: Da $\text{Hom}_K(B_K, B_K[t]) = \bigoplus_{i=0}^{p-1} t^i \cdot \text{End}_K(B_K)$, folgt aus

$[\exp](tD) = [\exp](tD')$ sicherlich $D = D'$. Es ist also noch zu zeigen: 1. Jeder Kozyklus φ ist $[\exp]$ -Reihe einer Derivation D . 2. Genau dann ist $[\exp](tD)$ ein Kozyklus, wenn $D^{[p]} = 0$. All dies erfordert einige Rechnungen.

Zunächst nützen wir die allgemeine Abstiegstheorie aus: Jeder Kozyklus φ stammt von einer verzerrten Form A von B her, genauer: Es gibt eine k -Algebra A und einen k -Isomorphismus $\beta: B_K \rightarrow A_K$ mit $\varphi = \eta_1(\beta)^{-1} \eta_0(\beta)$. (Wäre z.B. $A = B$, so wäre $\varphi \sim \text{id}$.) Es ist $\eta_1(\beta)^{-1} = \eta_1(\beta^4) = K[t] \otimes_K \beta^{-1}$ (siehe

Diskussion der η_i), und $\eta_0(\varphi) \cdot (B \otimes \eta_0) = (A \otimes \eta_0) \cdot \beta$. Sei $H_B \in \text{End}_{K[t]}(B_K[t])$ die natürliche Fortsetzung von $B \otimes \eta_0: B_K \rightarrow B_K[t]$, und analog H_A . Dann gilt $\eta_0(\varphi) \cdot H_B = H_A \cdot (K[t] \otimes_K \beta)$.

(2.1.3.1) LEMMA. H_B und H_A sind Isomorphismen.

BEWEIS: $H_B = \sigma \otimes_K B$, wobei $\sigma: K[t] \rightarrow K[t]$ durch $\sigma(\alpha) = \alpha + t$, $\sigma(t) = t$, gegeben ist. σ ist surjektiv, da es modulo Nilpotents surjektiv ist. Also ist σ wegen der endlichen k -Dimension von $K[t]$ auch injektiv, q.e.d. Dasselbe gilt für H_A . (Mann kann sofort ein Inverses zu konstruieren: $\alpha \mapsto \alpha - t$, $t \mapsto t$.)

$$\begin{aligned} \text{Nun gilt: } \varphi &= \varphi \cdot H_B \cdot H_B^{-1} = (K[t] \otimes_K \beta^{-1}) \cdot \eta_0(\beta) \cdot H_B \cdot H_B^{-1} \\ &= (K[t] \otimes_K \beta^{-1}) \cdot H_A \cdot (K[t] \otimes_K \beta) \cdot H_B^{-1}. \end{aligned}$$

(2.1.3.2) LEMMA. $H_A = \exp(t \cdot \partial)$ in $\text{End}_{K[t]}(A_K[t]) = \text{Hom}_K(A_K, A_K[t])$, und ebenso für H_B . ($\partial = \partial_A := A \otimes \partial$) (Hier ist die gewöhnliche exp-Reihe bis Exponent $p-1$ gemeint; t^p ist ja bereits Null.)

BEWEIS: H_A und $\exp(t \cdot \partial)$ sind A -linear, d.h. es reicht, die Gleichheit auf K zu testen. Das Lemma ergibt sich dann aus dem Satz von TAYLOR: Sei $f \in k[X]$, o.E. $\deg(f) < p$; wir betrachten $f(\alpha) \in K$. Es ist

$$H_A(f(\alpha)) = \eta_0(f(\alpha)) = f(\alpha + t).$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \exp(t \cdot \partial)(f(\alpha)) &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^i}{i!} \cdot \partial^i(f(\alpha)) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^i}{i!} \cdot f^{(i)}(\alpha) \quad (2.1.1; f^{(i)} \text{ ist die } i\text{-te Ableitung von } f) \\ &= f(\alpha + t) \text{ nach TAYLOR, da } \deg(f) < p. \end{aligned}$$

Analog kann man zeigen: $H_A^{-1} = \exp(-t \cdot \partial)$.

Wir setzen jetzt: $\tilde{D} := \beta^{-1} \partial_A \beta \in \text{Der}_K(B_K)$, $D := \tilde{D} - \partial_B$.

Da $D(\alpha) = 0$, ist $D \in \text{Der}_K(B_K)$. Man findet

$$\begin{aligned} \varphi &= (K[t] \otimes_K \beta^{-1}) \exp(t \cdot \partial_A) (K[t] \otimes_K \beta) \exp(-t \cdot \partial_B) \\ &= \exp(t \cdot (\beta^{-1} \partial_A \beta)) \cdot \exp(-t \partial_B) \quad (\text{Konjugieren vertauscht mit exp}) \\ &= \exp(t \cdot \tilde{D}) \cdot \exp(-t \partial_B) \quad (*) \end{aligned}$$

Würden jetzt $\tilde{D}$ und ∂_B kommutieren, so wäre $(*) = \exp(tD - t\partial_B) = \exp(tD)$, d.h. die normale und nicht die symbolische Exponentialreihe in tD . Die Korrekturterme bei der Definition von $[\exp]$, d.h. von $D^{[i]}$, machen gerade dieses "Fehlverhalten", nicht zu kommutieren, wieder gut wir behaupten:

$$\exp(t \cdot \tilde{D}) \exp(-t \partial) = [\exp](tD).$$

(2.1.3.3) LEMMA. Der t^i -Term in $(*)$ ist $\frac{t^i}{i!} \tilde{D}^i (0 \leq i \leq p-1)$.

BEWEIS: Induktion über i . Der Fall $i = 0$ ist klar.

Das $i!$ -fache des t^i -Terms in $(*)$ ist, wie man durch Ausmultiplizieren und Berücksichtigen von $i! \frac{1}{j!(i-j)!} = \binom{i}{j}$ sieht:

$$C_i := \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \cdot (-1)^j \cdot \tilde{D}^{i-j} \partial^j.$$

Zu zeigen ist $C_i = D^{[i]}$; wir wissen $C_1 = D^{[1]}$ für $1 < i$.

Nach Definition ist $D^{[i]} = D \cdot D^{[i-1]} + \partial(D^{[i-1]})$

$$= (\tilde{D} - \partial) D^{[i-1]} + [\partial, D^{[i-1]}]$$

$$= \tilde{D} \cdot D^{[i-1]} - D^{[i-1]} \cdot \partial$$

$$\stackrel{\text{I.V.}}{=} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-1)^j \tilde{D}^{i-1-j} \partial^{j+1} - \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-1)^j \tilde{D}^{i-1-j} \partial^{j+1}.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich wegen $\binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-1} = \binom{i}{j}$ zu dem definierenden Ausdruck für C_i , q.e.d.

Aus diesem Lemma folgt $\varphi = [\exp](tD)$, und damit ist Punkt 1. des Beweises von 2.1.3 geführt. Es ist noch zu zeigen:
 $D^{[p]}=0 \iff \varphi := [\exp](tD) \text{ ist Kozyklus.}$

Hierzu muß man $\eta'_i(\varphi)$, $i=0,1,2$, ausrechnen. Man sieht sofort:
 $\eta'_2(\varphi) = K[t, t'] \otimes_K \varphi$. Die anderen beiden sind schwieriger zu berechnen. Wir führen folgende Abkürzung ein: Für $g \in \text{Hom}_K(B_K, B_K)$ sei $g^{(i)} := \partial(\dots(\partial(g))\dots)$, der i -fache Kommutator von ∂ mit g .

(2.1.3.4) LEMMA. Für $g \in \text{End}_K(B_K)$ gilt $\eta'_0(K[t] \otimes_K g) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^i}{i!} \cdot g^{(i)}$.

BEWEIS: Für $x \in B \subset B_K$ ist $g^{(1)}(x) = \partial(g(x))$, da $\partial(x) = 0$. Induktiv folgt für $x \in B$: $g^{(i)}(x) = \partial^i(g(x))$. Außerdem ist für $x \in B$ $(\eta'_0(K[t] \otimes_K g))(x) = \eta'_0((K[t] \otimes_K g)(x)) = g(x)_{\alpha}(\alpha+t)$. (Der letzte Ausdruck besagt: Man schreibe $g(x)$ als Polynom in α mit Koeffizienten in B und substituiere $\alpha+t$ für α .) Letzterer Ausdruck ist nach TAYLOR gleich $\sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^i}{i!} \partial^i(g(x))$, also gleich $\sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^i}{i!} g^{(i)}(x)$. Da mit g auch $g^{(i)}$ K -linear ist, wie man leicht sieht, folgt durch lineare Fortsetzung die behauptete Gleichheit.

Jetzt sind wir in der Lage, $\eta'_0(\varphi)$ und $\eta'_1(\varphi)$ auszurechnen. Die $D^{[i]}$ sind allesamt K -linear (vgl. den letzten Satz im letzten Beweis). Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} \eta'_0(\alpha) &= \alpha + t, & \eta'_0(t) &= t' - t; \\ \eta'_1(\alpha) &= \alpha, & \eta'_1(t) &= t'. \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \eta'_0(\varphi) &= \sum_{i=0}^{p-1} \eta'_0\left(\frac{t^i}{i!} \cdot (K[t] \otimes_K D^{[i]})\right) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(t'-t)^i}{i!} \cdot \eta'_0(K[t] \otimes_K D^{[i]}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(t'-t)^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^j}{j!} (D^{[i]})^{(j)} \quad (2.1.3.4).$$

$$\begin{aligned} \eta'_1(\varphi) &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t'^i}{i!} \cdot \eta'_1(K[t] \otimes D^{[i]}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t'^i}{i!} \cdot \eta'_1(\eta_1(D^{[i]})) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t'^i}{i!} \cdot (K[t, t'] \otimes_K D^{[i]}). \end{aligned}$$

(Die letzte Gleichung gilt, weil $\eta'_1 \cdot \eta_1: K \rightarrow K[t, t']$ die kanonische Einbettung ist.)

Für einen Moment schreiben wir $s = t' - t$, $t' = s + t$. Dann wird $K[t, t'] = K[t][s] = \bigoplus_{0 \leq \gamma, \delta < p} s^\gamma \cdot t^\delta \cdot K$. Wenn man in der Notation einige kanonische Ringerweiterungen unterdrückt, bekommt man:

$$\eta'_0(\varphi) = \sum_{0 \leq i, j}^{p-1} \frac{s^i t^j}{i! j!} \cdot (D^{[i]})^{(j)};$$

$$\eta'_2(\varphi) = \sum_{o=1}^{p-1} \frac{t^o}{o!} D^{[o]};$$

$$\eta'_1(\varphi) = \sum_{o=1}^{p-1} \frac{(s+t)^o}{o!} D^{[o]}.$$

Was bedeutet jetzt die Formel $\eta'_2(\varphi) \cdot \eta'_0(\varphi) = \eta'_1(\varphi)$?

Wir multiplizieren aus. Da $\text{End}_{K[t, t']}(B_K[t, t']) =$

$\bigoplus_{0 \leq \gamma, \delta}^{p-1} s^\gamma t^\delta \cdot \text{End}_K(B_K)$, kann man Koeffizientenvergleich bei

$s^\gamma t^\delta$ durchführen und erhält (für $0 \leq \gamma, \delta < p$ beliebig aber fest) auf der linken Seite:

$$(**) \quad \frac{1}{\gamma!} \cdot \sum_{\varepsilon + \zeta = \delta} \frac{1}{\varepsilon! \zeta!} \cdot D^{[\varepsilon]} \cdot (D^{[\zeta]})^{(\varepsilon)};$$

auf der rechten Seite:

$$(***) \quad \frac{1}{\gamma!} \cdot \frac{1}{\delta!} \cdot D^{[\gamma+\delta]} \quad \text{für } \gamma+\delta < p, \text{ aber}$$

$$\text{NULL} \quad \text{für } p \leq \gamma+\delta (< 2p-1).$$

Nach Lemma 2.1.4 (s.u.) ist (**) gleich $\frac{1}{\gamma!} \cdot \frac{1}{\delta!} \cdot D^{[\gamma+\delta]}$ für alle Paare (γ, δ) mit $0 \leq \gamma, \delta < p$. Also hat man Gleichheit von $\eta'_2(\varphi) \cdot \eta'_0(\varphi)$ mit $\eta'_1(\varphi)$ genau dann, wenn (**) = (***) für alle $0 \leq \gamma, \delta < p$, d.h. genau dann, wenn $D^{[\gamma+\delta]} = 0$ für alle γ, δ mit $p \leq \gamma+\delta$; $\gamma, \delta < p$. Dies ist offenbar äquivalent zu $D^{[p]} = 0$, denn allgemein gilt $D^{[n]} = 0 \Rightarrow D^{[n+1]} = 0$. Damit ist Satz 2.1.3 (modulo 2.1.4) bewiesen.

(2.1.4) LEMMA. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot D^{[i]} \cdot (D^{[N]})^{(n-i)} = D^{[n+N]}$ für beliebige $n, N \in \mathbb{N}$. (Man setzt $g^{(0)} = g$ für $g \in \text{End}_K(B_K)$, $D^{[\cdot]} = \text{id.}$) (N.B. Das Lemma wird oben mit $n = \delta$, $N = \gamma$ benutzt. Man hat noch durch $\gamma! \delta!$ zu dividieren.)

BEWEIS: Induktion über n .

$n = 0$: $1 \cdot \text{id} \cdot D^{[N]} = D^{[0+N]}$ trifft zu.

$$\underline{n \rightarrow n+1}: \quad D^{[n+N+1]} \underset{\text{Def.}}{=} D \cdot D^{[n+N]} + \partial(D^{[n+N]}) \underset{\text{I.V.}}{=}$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D \cdot D^{[i]} \cdot (D^{[N]})^{(n-i)} + \partial \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^{[i]} \cdot (D^{[N]})^{(n-i)} \right).$$

Da die Abbildung $g \mapsto \partial(g) = [\partial, g]$ eine Derivation von $\text{End}_K(B_K)$ in sich ist, ist die letzte Zeile gleich

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D \cdot D^{[i]} \cdot (D^{[N]})^{(n-i)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \partial(D^{[i]}) \cdot (D^{[N]})^{(n-i)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^{[i]} \cdot (D^{[N]})^{(n+1-i)}.$$

Durch termweises Zusammenfassen der ersten und zweiten Summe erhält man

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^{[i+1]} \cdot (D^{[N]})^{(n-i)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^{[i]} \cdot (D^{[N]})^{(n+1-i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot D^{[i]} \cdot (D^{[N]})^{(n+1-i)} \quad (\text{wegen } \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}).$$

q.e.d.

(2.1.5) BEISPIEL (wird später verallgemeinert). $p=2$, $B = k[X]$. Die Kozyklen in $\text{Aut}_{K[t]}(B_K[t])$ sind nach 2.1.3 bijektiv auf die K -Derivationen D von B_K mit $D^{[2]} = 0$ bezogen. Da aber $B_K = K[X]$, hat jedes D die Form $F \cdot \frac{\partial}{\partial X}$ für ein eindeutig bestimmtes $F \in K[X]$. ($D = F \cdot \frac{\partial}{\partial X}$ heißt $D(g) = F \cdot \frac{\partial g}{\partial X}$ für $g \in K[X]$). Insbesondere ist $F = D(X)$. Man berechnet:

$$D^{[p]} = D^{[2]} = D^2 + \partial(D)$$

$$= (F \cdot \frac{\partial}{\partial X})^2 + \partial(F \cdot \frac{\partial}{\partial X}).$$

Da auch $\partial(F \cdot \frac{\partial}{\partial X})$ eine K -Derivation ist, hat sie die Form $G \cdot \frac{\partial}{\partial X}$, und durch Einsetzen von X folgt $G = \partial(F) \cdot \frac{\partial}{\partial X}$. kann man als koeffizientenweise Ableitung von F nach α bezeichnen, und wir schreiben $F_\alpha := \partial(F)$. Also ist

$$D^{[2]} = (F \cdot \frac{\partial}{\partial X})^2 + F_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial X}$$

$$= F \cdot \frac{\partial}{\partial X} \cdot F \cdot \frac{\partial}{\partial X} + F_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial X}$$

$$= F \cdot (F' + F \cdot \frac{\partial}{\partial X}) \cdot \frac{\partial}{\partial X} + F_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial X}$$

$$= (F \cdot F' + F_\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial X} + F^2 \cdot (\frac{\partial}{\partial X})^2$$

$$= (F \cdot F' + F_\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial X}, \text{ da } (\frac{\partial}{\partial X})^2 = 0.$$

(Es ist kein Zufall, daß $D^{[2]}$ wieder eine Derivation ist!) Also ergibt sich: $D^{[2]} = 0 \iff F \cdot F' = F_\alpha$.

Nachdem wir jetzt die Kozyklen kennen, müssen wir natürlich auch die Relation "kohomolog" näher untersuchen.

(2.1.6) SATZ. Zwei Derivationen $D_1, D_2 \in \text{Der}_K(B_K)$ gehören in der Korrespondenz 2.1.3 genau dann zu kohomologen Kozyklen φ_1, φ_2 , wenn es einen K -Automorphismus $\rho \in \text{Aut}_K(B_K)$ gibt mit

$$D_2 = D_1^{\rho} + \partial \log(\rho).$$

Hierbei ist D_1 die K -Derivation $\rho^{-1} D_1 \rho$, und $\partial \log(\rho)$ ist die K -lineare Abbildung $\rho^{-1} \cdot \partial(\rho)$. (Die Bezeichnung $\partial \log(\rho)$ beruht auf der Analogie zu $d \log f(x) = f(x)^{-1} \cdot d f(x)$ für $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.)

BEWEIS: Auch $\partial \log(\rho)$ ist eine K -Derivation, denn $\partial(\rho)$ ist eine K -Derivation. Also braucht man obige Gleichheit nur auf $B \subset B_K$ zu testen. Zunächst müssen wir aber ρ finden.

Nach Voraussetzung sind $\varphi_i = [\exp](tD_i)$, $i=1,2$, kohomolog, d.h. es existiert ein $\rho \in \text{Aut}_K(B_K)$ mit $\varphi_2 = \eta_1(\rho^{-1}) \cdot \varphi_1 \cdot \eta_0(\rho)$.

Wir behaupten, daß dies impliziert $D_2 = D_1^{\rho} + \partial \log(\rho)$. Dies braucht nur für $x \in B$ bestätigt zu werden. Da $D_2(x)$ der t -Term von $\varphi_2(x) \in B_K[t]$ ist, reicht es zu zeigen:

$$\varphi_2(x) = x + t \cdot (D_1^{\rho}(x) + (\partial \log \rho)(x)) + \text{höhere Terme in } t.$$

Man berechnet $\varphi_2(x) = (\eta_1(\rho^{-1}) \cdot \varphi_1 \cdot \eta_0(\rho))(x)$ modulo t^2 :

$$\begin{aligned} \eta_1(\rho^{-1}) \cdot \varphi_1 \cdot \eta_0(\rho)(x) &= (K[t] \otimes_K \rho^{-1}) [\exp](tD_1) \eta_0(\rho)(x) \\ &= (\quad " \quad) \quad " \quad " \quad \rho(x)_{\alpha}(\alpha+t) \\ &\equiv (\quad " \quad) \quad " \quad " \quad (\rho(x) + t \cdot \partial(\rho(x))) \\ &\equiv \rho^{-1}(\rho(x) + t \cdot \partial(\rho(x)) + t \cdot D_1(\rho(x))) \\ &\equiv x + t \cdot \rho^{-1}(\partial(\rho(x))) + t \cdot D_1^{\rho}(x) \\ &\equiv x + t \cdot (\rho^{-1} \cdot \partial(\rho))(x) + D_1^{\rho}(x), \end{aligned}$$

was wegen $\partial(\rho)(x) = \partial(\rho(x))$ (da ja $\partial(x)=0$) die Behauptung ergibt.

Wenn andererseits ein $\rho \in \text{Aut}_K(B_K)$ existiert mit $D_2 = D_1^\rho + \partial \log(\rho)$, so sind φ_2 und $\eta_1(\rho^{-1}) \cdot \varphi_1 \cdot \eta_0(\rho)$ beides Kozyklen; letzterer hat also die Form $[\exp](tD_3)$. Nach obiger Rechnung ist $D_3 = D_1^\rho + \partial \log(\rho)$, also $D_3 = D_2$, d.h. $\varphi_2 = \eta_1(\rho^{-1}) \cdot \varphi_1 \cdot \eta_0(\rho)$. q.e.d.

Es ist an der Zeit, etwas darüber zu sagen, wie sich unser Formalismus zur Theorie des radikalen Abstiegs der Höhe Eins bei $[Kn-O]$ verhält.

(2.1.7) BEMERKUNGEN (ohne detaillierte Beweise). Die "übliche" Beschreibung der verzerrten Formen von B modulo Isomorphie wie etwa in $[Kn-O]$ benützt die Kohomologiegruppe $H^1(\mathfrak{g}, \text{Der}_K(B_K))$, wobei $\mathfrak{g}$ die p -Liealgebra (!) der Derivationen von K über k ist, also $\mathfrak{g} = \{x \cdot \partial \mid x \in K\} \subset \text{End}_K(K)$. $\mathfrak{g}$ operiert auf $\text{Der}_K(B_K)$ durch Derivationen: $\tau(D) = \tau D - D\tau$ ($\tau \in \mathfrak{g}$, $D \in \text{Der}_K(B_K)$), und auf $\text{Der}_K(B_K)$ ist ähnlich wie bei uns eine formale $[n]$ -te Potenz erklärt. Die Kozykluseigenschaften sind folgende: $\lambda \in \text{Hom}_K(\mathfrak{g}, \text{Der}_K(B_K))$ heißt ein Kozyklus, wenn

- (i) $\lambda([d, e]) = [\lambda(d), \lambda(e)] + d(\lambda(e)) - e(\lambda(d))$
- (ii) $\lambda(d^p) = (\lambda(d))^{[p]} \quad (d, e \in \mathfrak{g}).$

Zur Relation "kohomolog" siehe $[Kn-O]$.

Der Zusammenhang zu unserer Beschreibung der Kohomologieklassen von Kozyklen im Amitsurschen Sinne und damit der verzerrten Formen von B ist folgender: Zur Derivation D gehört via verzerrter Form und der Theorie in $[Kn-O]$ der Kozyklus (!) $\lambda^D: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_K(B_K)$, $\lambda^D(x \cdot \partial) = x \cdot D$. Man kann jetzt ausrechnen, daß jeder zu λ^D im Sinne von $[Kn-O]$ kohomologe Kozyklus bereits die Form $\lambda^{D'}$ hat, wobei D' in unserem Sinne zu D kohomolog ist. Also sind alle Kozyklen in $H^1(\mathfrak{g}, \text{Der}_K(B_K))$ von der Form λ^D , ein praktisches aber nicht tief liegendes Ergebnis. Der springende Punkt ist folgender: (ii) liefert für $d = \partial$ genau die Bedingung $D^{[p]} = 0$ ($\lambda = \lambda^D$). Die Bedingung $D^{[p]} = 0$

ist also formal schwächer als (ii) und muß doch zu (ii) äquivalent sein, wie wir jetzt wissen ((i) kann man für λ^D stets nachrechnen). Dies ist eine wesentliche Erleichterung. Schreibt man nämlich (ii) für $d = x\partial$, $x \neq 1$, einmal aus, so bekommt man ungeheuer komplizierte Ausdrücke. Vergleiche 2.1.8 b).

(2.1.8) BEMERKUNG.

a) Auch in [Ka-M-Ta] werden verzerrte Formen unter analogen Voraussetzungen an $K|k$ behandelt. Dort spielen ebenfalls Derivationen D von B_K eine wichtige Rolle, und die entscheidende Bedingung dort heißt $\tilde{D}^p = 0$ ($\tilde{D} = D + \partial$). $()^p$ meint hier wirklich p -fache Hintereinanderausführung. Wenn man diese Gleichung $(D+\partial)^p = 0$ aber ausmultipliziert (und das müßte man in konkreten Fällen, s.u.!), dann erhält man einen Ausdruck der Form

$$D^{[p]} + ?_1 \cdot \partial + \dots + ?_{p-1} \cdot \partial^{p-1}$$

der Null ist, genau dann wenn alle $?_i$ sowie $D^{[p]}$ Null sind. Auch hier ist also unsere Beschreibung einfacher.

b) Wir brauchen (auch um den Zusammenhang mit [Kn-O] weiter zu klären) noch eine Verallgemeinerung von $D^{[p]} = 0$. Wir schreiben die lineare Abbildung λ^D aus typographischen Gründen D_- : für $d \in \mathcal{O}$, $d = z \cdot \partial$, setzen wir $D_d := z \cdot D \in \text{Der}_K(B_K)$. In der Notation von 2.1.3 gilt dann: $\tilde{D}_d := D_d + d_B = z \cdot (D + \partial) = z \cdot \tilde{D} = z \cdot \beta^{-1} \partial_A \beta = \beta^{-1} \cdot d_A \cdot \beta$. (d_A und d_B sind jeweils die kanonischen Fortsetzungen von d auf A bzw. B .) In Analogie zu $D^{[p]}$ wird $D_d^{[p]}$ definiert, wobei in der Definition durchweg ∂ durch d ersetzt wird. Genau wie in a) gilt: $(D_d + d)^p = D_d^{[p]} + ?_1 \cdot d + \dots + ?_{p-1} \cdot d^{p-1}$. Andererseits gilt auch $(D_d + d)^p = \beta^{-1} (d_A^p) \beta = \beta^{-1} (\tilde{z} \partial_A) \beta$ (d^p ist in $\mathcal{O}$, hat also die Form $\tilde{z} \partial$) $= \tilde{z} D + \tilde{z} \partial = D(d^p) + d^p$. Durch Gleichsetzen folgt: $D_d^{[p]} + ?_1 \cdot d + \dots + ?_{p-1} \cdot d^{p-1} =$

$D(d^p) + d^p$, wobei $D_d^{[p]}$ und $D_{(d^p)}$ K -linear sind und die übrigen Summanden B annullieren (wegen $d(B) = 0$). Folglich ist

$$D_d^{[p]} = D_{(d^p)} \quad \text{für alle } d.$$

Für $d = \partial$ bekommt man $D^{[p]} = 0$ zurück.

(2.1.9) BEISPIEL. $B = k[X]$ (beliebige endliche Charakteristik).

Aus 2.1.5 wissen wir schon, daß alle $D \in \text{Der}_K(B_K)$ die Form

$F \cdot \frac{\partial}{\partial X}$ mit $F \in k[X]$ haben. Falls $F \in k[X^p]$, so ist (s.u.)

$D^{[p]} = 0$, D definiert also eine verzerrte Form. Wir werden später sehen, daß D_1 und D_2 nicht kohomolog sein können, wenn $\deg(F_1) \neq \deg(F_2) \notin \{0, 1\}$. Die Implikation $F \in k[X^p] \Rightarrow$

$D^{[p]} = 0$ folgt so: $\partial D - D\partial$ ist eine K -Derivation, und $(\partial D - D\partial)(X) = \partial(F) - 0 = 0$, da $F \in k[X]$. Also kommutiert ∂ mit D , also mit jeder Potenz von D , d.h. $\partial(D^i) = 0$.

Induktiv folgt jetzt aus der Definition $D^{[i]} = D^i$, insbesondere $D^{[p]} = D^p$. Wir behaupten $D^i = F^i \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^i$. Dies folgt wieder induktiv: Alle Potenzen von F sind in $k[X^p]$, d.h.

Multiplikation mit F^i vertauscht mit dem Ableitungsoperator $\frac{\partial}{\partial X}$. Deswegen ist $D^i = (F \cdot \frac{\partial}{\partial X})^i = F^i \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^i$. Insbesondere ist $D^p = F^p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^p = 0$, weil $\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^p = 0$.

Zum Schluß diese Abschnitts zeigen wir, daß im Spezialfall des obigen Beispiels die Bedingung $D^{[p]} = 0$ noch expliziter gemacht werden kann (und auch die Kohomologie-Relation). Wir wollen nämlich an F ablesen, wann $D = F \cdot \frac{\partial}{\partial X}$ die Bedingung $D^{[p]} = 0$ erfüllt. Hierzu brauchen wir zwei Propositionen:

(2.1.10) PROPOSITION. Sei $D \in \text{Der}_K(B_K)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$D^{[n]}(x \cdot y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^{[i]}(x) \cdot D^{[n-i]}(y) \quad (x, y \in B_K).$$

(Vergleiche hierzu auch die Bemerkungen weiter unten!)

BEWEIS: Trivial für $n = 0$. Es ist $D^{[n+1]} = (D + \partial) \cdot D^{[n]} - D^{[n]} \partial$. Einsetzen von xy ergibt

$$\begin{aligned}
 D^{[n+1]}(xy) &= (D + \partial)D^{[n]}(xy) - D^{[n]}(\partial(x)y + \partial(y)x) = \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left((D + \partial)(D^{[i]}(x)) \right) D^{[n-i]}(y) + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^{[i]}(x) \left((D + \partial)(D^{[n-i]}(y)) \right) \\
 &\quad - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[D^{[i]}(\partial(x)) \cdot D^{[n-i]}(y) + D^{[i]}(x) \cdot D^{[n-i]}(\partial(y)) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[(D + \partial)D^{[i]} - D^{[i]}\partial \right](x) \cdot D^{[n-i]}(y) + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^{[i]}(x) \left[(D + \partial)D^{[n-i]} - D^{[n-i]}\partial \right](y) \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^{[i+1]}(x) D^{[n-i]}(y) + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^{[i]}(x) \cdot D^{[n+1-i]}(y) \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot D^{[i]}(x) \cdot D^{[n+1-i]}(y), \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

(2.1.11) KOROLLAR. Unter den Voraussetzungen von 2.1.10 ist $D^{[p]}$ eine Derivation, da $\binom{p}{i} = 0$ für $0 < i < p$.

(2.1.12) LEMMA. $\text{End}_K(K[X])$ wird durch Linksmultiplikation zu einem $K[X]$ -Linksmodul, in dem die Elemente id , $\frac{\partial}{\partial X}$, $\frac{\partial^2}{\partial X^2}$, ..., $\frac{\partial^{p-1}}{\partial X^{p-1}}$ $K[X]$ -linear unabhängig sind. Ferner ist $\sum_{i=0}^{p-1} f_i \cdot \frac{\partial^i}{\partial X^i}$ (mit $f_i \in K[X]$) genau dann eine K -Derivation, wenn $f_i = 0$ für alle $i \neq 1$.

BEWEIS: Sei $\sum_{i=0}^{p-1} f_i \cdot \frac{\partial^i}{\partial X^i} = 0$. Durch Einsetzen von 1 folgt $f_0 = 0$. Iterativ erhält man durch Einsetzen von $X, X^2, \dots$, daß alle f_i Null sind.

Sei jetzt $H := \sum_{i=0}^{p-1} f_i \cdot \frac{\partial^i}{\partial X^i}$ eine K -Derivation. Wir wissen, daß $H = f \cdot \frac{\partial}{\partial X}$ für ein $f \in K[X]$. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung muß gelten $f = f_1, f_0 = f_2 = \dots = f_{p-1} = 0$.

Jetzt kommt die angekündigte Vereinfachung der Bedingung $D^{[p]} = 0$:

(2.1.13) SATZ. Sei $D = F \cdot \frac{\partial}{\partial X}$ ($B_K = K[X]$). Man kann $D^{[p]}$ in der Form $\sum_{i=1}^p f_i \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^i$ schreiben mit wohlbestimmten $f_i \in K[X]$, die natürlich von F abhängen. Dann gilt: $D^{[p]} = 0$ genau dann, wenn $f_1 = 0$, und f_1 ergibt sich aus folgender Rekursion:

$$F_{[1]} := F; \quad F_{[i+1]} := F \cdot (F_{[i]})' + \partial(F_{[i]}); \quad f_1 := F_{[p]}.$$

BEWEIS: Nennen wir einen Ausdruck $\sum_{i=1}^n g_i \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^i$ temporär

ein Differentialpolynom vom Grad $\leq n$. Klarerweise gilt:

Wenn H_1, H_2 Differentialpolynome vom Grad $\leq n_1$ bzw. n_2 sind, dann ist $H_1 \cdot H_2$ ein Differentialpolynom vom Grad $\leq n_1 + n_2$. (Man braucht nur die Vertauschungsregel $\frac{\partial}{\partial X} g =$

$g \frac{\partial}{\partial X} + g'$.) Ebenso bestätigt man leicht, daß $\partial(\sum g_i \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^i) = \sum \partial(g_i) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^i$, also wieder ein Differentialpolynom vom Grad

$\leq n$ ist (denn ∂ und $\frac{\partial}{\partial X}$ kommutieren). Also hat $D^{[p]}$ offenbar

die im Satz behauptete Form. Nach 2.1.11 ist $D^{[p]}$ aber eine Derivation, nach 2.1.12 muß also $f_2 = \dots = f_{p-1} = 0$ sein, woraus die Behauptung folgt, denn f_p spielt keine Rolle wegen $\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^p = 0$.

Es ist nun möglich, f_1 zu berechnen, ohne ganz $D^{[p]}$ zu berechnen. Hierzu macht man folgende Beobachtung: Um den

$\frac{\partial}{\partial X}$ -Term des Differentialpolynoms $D^{[i+1]}$ zu erhalten, benötigt man nur den $\frac{\partial}{\partial X}$ -Term von $D^{[i]}$, nicht aber die höheren. Sei nämlich $D^{[i]} = g \cdot \frac{\partial}{\partial X} + \sum_{j \geq 2} g_j \cdot (\frac{\partial}{\partial X})^j$. Dann ist

$$\begin{aligned} D^{[i+1]} &= D \cdot D^{[i]} + \partial(D^{[i]}) \\ &= (F \frac{\partial}{\partial X}) (g \frac{\partial}{\partial X} + \text{höhere T.}) + \partial(g) \frac{\partial}{\partial X} + \text{höhere T.} \\ &= F \cdot g' \cdot \frac{\partial}{\partial X} + F \cdot g \cdot (\frac{\partial}{\partial X})^2 + \partial(g) \frac{\partial}{\partial X} + \text{höhere Terme} \\ &= (F \cdot g' + \partial(g)) \frac{\partial}{\partial X} + \text{höhere Terme.} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, daß die $\frac{\partial}{\partial X}$ -Terme von $D^{[i]}$, etwa $F_{[i]} \frac{\partial}{\partial X}$ geschrieben, der oben angegebenen Rekursion genügen, q.e.d.

Wir fassen zusammen: Die Derivation $D = F \frac{\partial}{\partial X}$ definiert genau dann eine verzerrte Form von $k[X]$, wenn $F_{[p]} = 0$.

Rechenbeispiel: Schreibe F_α für $\partial(F)$. $p=3$. Dann ergibt sich $F_{[3]}$ als

$$F_{[3]} = F_{[p]} = F \cdot F \cdot F'' + F \cdot F' \cdot F' + 2F \cdot F_\alpha + F_\alpha \cdot F' + F_{\alpha\alpha}.$$

Wieder sieht man: $F \in k[X^p] \Rightarrow F_{[p]} = 0$.

(2.1.14) BEMERKUNG. Die Proposition 2.1.10 hat eine weitergehende Interpretation. Falls $[B:k]$ endlich ist, so erhält $\text{End}_K(B_K)$ durch die Algebrastruktur von B die Struktur einer K -Koalgebra, in der die Elemente $D^{[i]}/i!$ den Formeln $\varepsilon(D^{[0]}) = 1, \Delta(D^{[i]}) = \sum_{j \leq i} \binom{i}{j} D^{[j]} \otimes D^{[i-j]}$ genügen, das heißt, eine Folge von sogenannten dividierten Potenzen bilden. Es ist eine formale Konsequenz hieraus, daß das Element $\varphi := \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^i}{i!} D^{[i]}$ in $\text{End}_{K[t]}(B_K[t])$ gruppenähnlich ist, d.h.

$\varepsilon(\varphi) = 1, \Delta(\varphi) = \varphi \otimes \varphi$. Dies besagt aber gerade, daß φ ein Algebrenhomomorphismus ist. (In 2.1.3 wurde dies nur für $D^{[p]} = 0$

bewiesen.) Die letzte Aussage stimmt auch für $[B:k] = \infty$, nur ist $\text{End}_K(B_K)$ dann nicht mehr in kanonischer Weise eine Koalgebra.

(2.1.15) BEMERKUNG. Unter Benutzung der Notation von 2.1.3 und 2.1.6 kann man ohne weiteres angeben, welche verzerrte Form A zu einer Derivation D gehört. Im Beweis von 2.1.3 war $D = \beta^{-1} \partial_A \beta$ (mit $\beta: B_K \xrightarrow{\cong} A_K$). Also ist $\partial_A = \beta(D + \partial_B) \beta^{-1}$, und trivialerweise ist $A = \text{Ke}(\partial_A) \subset A_K$. Da β K -linearer Isomorphismus ist, ist $A \cong \text{Ke}(D + \partial_B) \subset B_K$. Beispielsweise kommt für $D = 0$ die triviale Form $\text{Ke}(\partial_B) = B$ heraus.

Für spätere Zwecke müssen wir noch einen Spezialfall genauer untersuchen.

(2.1.16) SATZ. Sei $D = F \cdot \frac{\partial}{\partial X}$ wie immer, $F_{[p]} = 0$.

a) Wenn $F \in K \cdot X + K[X^p]$ (die Monome von F haben Grad $0, 1, p, 2p, 3p, \dots$), dann ist $F \frac{\partial}{\partial X}$ zu einem $G \frac{\partial}{\partial X}$ kohomolog mit $G \in K[X^p]$, und G hat höchstens dann ein X^n -Monom für beliebiges n , wenn schon F eines hatte.

b) Wenn $F \in K[X^p]$, so ist $F_{[p]} = 0$ gleichbedeutend mit $\partial^{p-1}(F) = 0$.

BEWEIS: a). Sei $F = f \cdot X + P$, $P \in K[X^p]$. Wir verwenden die Notationen von 2.1.8 b): Für jedes $d = z \frac{\partial}{\partial y}$ betrachten wir $D_d = F_d \frac{\partial}{\partial X}$, $F_d = zF = zyX + zP$. Wir behaupten: Die Abbildung $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow K$, $\lambda(d) := zy$ ist ein 1-Kozyklus von p -Liealgebren im Sinne von [Kn-0], p. 67ff. Die Bedingung $\lambda([d, d']) = d(\lambda(d')) - d'(\lambda(d))$ ist leicht nachzurechnen. Die zweite Bedingung reduziert sich (loc.cit.) auf $\lambda(d^p) = \lambda(d)^p + d^{p-1}(\lambda(d))$, weil die p -Liealgebra K abelsch ist. Nach Definition ist $\lambda(d^p)$ der lineare Koeffizient von $F_{(d^p)}$, welches nach 2.1.8 b) gleich $(F_d)_{[p]}$ ist. (Auch $(F_d)_{[p]}$ ist in Analogie zu $F_{[p]}$ definiert, mit d anstelle von ∂).

Sei $\rho_{[i]}$ der lineare Koeffizient von $F_d^{[i]}$. Aus der Definition von $F_d^{[i]}$ ergibt sich:

$$F_d^{[i]} = \rho_{[i]}X + \text{Element von } K[X^P];$$

$$\rho_{[1]} = z\gamma = \lambda(d);$$

$$\rho_{[i+1]} = \lambda(d)' \cdot \rho_{[i]} + d(\rho_{[i]}).$$

Es reicht also zu zeigen: $\rho_{[p]}$ hat die gewünschte Form $\lambda(d)^P + d^{P-1}(\lambda(d))$. Dies ist gar nicht trivial (explizites "Ausmultiplizieren" führt auf monströse Ausdrücke). Wenn man mit $\widehat{z\gamma}$ die Linksmultiplikation mit $z\gamma$ auf K bezeichnet, so gilt nach der Rekursionsformel für die $\rho_{[i]}$: $\rho_{[p]} = (\widehat{z\gamma} + d)^{P-1}(z\gamma) = (\widehat{z\gamma} + d)^P(1)$. (Die p -te Potenz ist in der assoziativen Algebra $\text{End}_K(K)$ zu bilden.) Nach [Ja] gilt:

$$(\widehat{z\gamma} + d)^P = \widehat{z\gamma}^P + d^P + \sum_t \frac{1}{n(t)} \cdot [t(1), [\dots [t(p-1), d] \dots]],$$

wobei t alle Abbildungen $\{1, \dots, p-1\} \rightarrow \{\widehat{z\gamma}, d\}$ durchläuft und $n(t)$ angibt, wie oft t den Wert $\widehat{z\gamma}$ annimmt. Es zeigt sich, daß fast alle der geschachtelten Kommutatoren Null sind. In der Tat muß $t(p-1)$ gleich $\widehat{z\gamma}$ sein, sonst ist schon die innerste Klammer Null. Dann ist aber $[t(p-1), d] = [\widehat{z\gamma}, d] = -[d, \widehat{z\gamma}] = \widehat{d(z\gamma)}$ K -linear, d.h. $t(p-2)$ darf nicht $\widehat{z\gamma}$ sein, muß also $= d$ sein. Innen bekommt man also $-[d, [d, \widehat{z\gamma}]] = \widehat{d^2(z\gamma)}$, d.h. wieder etwas K -lineares. Derart sieht man, daß der einzige nichtverschwindende Term obiger Summe der Term

$$- \frac{1}{1} \cdot [d, [d, [\dots [d, [\widehat{z\gamma}, d] \dots]]] = \widehat{d^{P-1}(z\gamma)}$$

ist. Wenn wir die erhaltene Gleichung in $1 \in K$ auswerten, fällt auch noch der d^P -Term fort, und man bekommt tatsächlich

$$\rho_{[p]} = (z\gamma)^P + d^{P-1}(z\gamma).$$

Also ist λ ein 1-Kozyklus. Nach dem "inseparablen" Theorem Hilbert 90 (siehe [Kn-0], p.69) gibt es also ein $u \in K^*$

mit $\lambda(d) = \frac{d(u)}{u}$, insbesondere $\gamma = \lambda(\partial) = \frac{\partial(u)}{u}$.

Jetzt können wir G finden. Wir setzen φ an als den Automorphismus von $K[X]$, der X auf $u^{-1}X$ abbildet. $D_1 :=$

$D^P + \partial \log(\varphi)$ ist nach 2.1.6 zu D kohomolog und $G := D_1(X)$ hat sicher keinen höheren Grad als $F = D(X)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} G &= \varphi^{-1}(D(\varphi(X))) + \varphi^{-1}(\partial(\varphi)(X)) = \varphi^{-1}(u^{-1}F) + \varphi^{-1}(\partial(u^{-1}) \cdot X) \\ &= u^{-1} \cdot F(uX) + \partial(u^{-1}) \cdot u \cdot X = u^{-1}F(uX) - \frac{\partial(u)}{u^2} u X = \\ &= u^{-1}F(uX) - \gamma \cdot X = \gamma \cdot X + u^{-1}P(uX) - \gamma \cdot X = u^{-1}P(uX) \in K[X^P], \\ &\text{q.e.d.} \end{aligned}$$

b) Durch Induktion zeigt man sofort: $F_{[i]} = \partial^{i-1}(F)$.

"...und all dies war verwickelt und unsauber."

THOMAS MANN, Zauberberg

(2.2) Allgemeines über Formen von A^1

Sei wie stets $K|k$ rein inseparabel vom Grad $p = \text{char}(k)$, $K = k(\alpha)$. Unter einer Form von $A^1 = A^1_k$ wollen wir stets ein k -Schema S verstehen mit $K \otimes_k S \cong A^1_K$. Jedes solche S ist automatisch affin nach einem Satz von CHEVALLEY, weil $K \otimes S \rightarrow S$ endlich ist (siehe z.B. [Ht] Ex. II5.17). Wir können uns also auf die Suche nach k -Algebren A mit $A_K \cong K^{[1]}$ beschränken.

Alle betrachteten Schemata sollen algebraisch über dem jeweiligen Grundkörper sein.

Wir benötigen einige Allgemeinheiten über algebraische Kurven. Zur Erinnerung: Eine Kurve über k ist ein integrales k -Schema der Dimension 1. Für $k = \bar{k}$ ist folgendes Lemma wohlbekannt:

(2.2.1) LEMMA. Jede (algebraische) Kurve X über k ist zu genau einer vollständigen singularitätenfreien Kurve C über k birational äquivalent. C heißt das Modell von X .

BEWEIS: X hat eine affine offene Teilmenge X_0 , die demnach für geeignetes n eine Kurve in A^n_k ist. Setze $\overline{X_0} =$ Abschluß von X_0 in $\mathbb{P}^n_k$. Dann ist $\overline{X_0}$ eine projektive Kurve, und $C :=$ Normalisierung von $\overline{X_0}$ ist zu $\overline{X_0}$, also zu X birational äquivalent, singularitätenfrei (da normal) und vollständig (da $C \rightarrow \overline{X_0}$ eigentlich und $\overline{X_0}$ vollständig ist). Damit ist die Existenz von C gezeigt. Seien also C_1 und C_2 birational äquivalente singularitätenfreie vollständige Kurven. Es existiert also eine offene (dichte) Teilmenge $X_1 \subset C_1$ und eine offene Einbettung $f: X_1 \rightarrow C_2$. $C_1 - X_1$ besteht aus endlich vielen abgeschlossenen Punkten, und nach [Ht] II4.7 kann man wegen der Vollständigkeit von C_2 f auf ganz C_1 fortsetzen. Wegen der Vollständigkeit von C_1 ist $f(C_1)$ in C_2 abgeschlossen, und nach Konstruktion dicht ($X_1 \hookrightarrow C_2$ war offene Einbettung), also

$f(C_1) = C_2$. Wenn man nun nicht mit f , sondern mit $g=f^{-1}: f(X_1) \rightarrow C_1$ beginnt, erhält man ebenso einen surjektiven Morphismus $g: C_2 \rightarrow C_1$. Auf offenen dichten Teilmengen sind f und g zueinander invers, folglich sind sie es (wegen der Separiertheit aller betrachteten Schemata) überall, und $C_1 \cong C_2$.

(2.2.2) LEMMA. (Vergleiche den Absatz "Konventionen".) Für eine beliebige Körpererweiterung $L:k$ und ein integrales k -Schema X gilt: X ist genau dann über k glatt, wenn $L \otimes_k X$ über L glatt ist. Insbesondere sind Formen von glatten Schemata wieder glatt.

BEWEIS: Nach [Ht] III10.0 ist die Glattheit von X über k äquivalent dazu, daß $\Omega_{X|k}$ lokal frei vom Rang $= \dim(X)$ ist. Da $\Omega_{L \otimes_k X|L} \cong L \otimes_k \Omega_{X|k}$, folgt die Behauptung aus der Theorie des treuflachen Abstiegs für Moduln.

Sei jetzt wieder $K = k(\alpha)$, $\alpha^p \in K$.

(2.2.3) BEMERKUNG. Für Schemata über einem perfekten Körper sind die Begriffe "glatt" und "singularitätenfrei" (=regulär) äquivalent, wie man zeigen kann (vgl. [Gr]₁). Allgemein gilt nur, daß glatte Schemata singularitätenfrei sind. (Eine Möglichkeit, dies zu beweisen, wäre folgende: Sei $S|k$ glatt. Dann ist $\bar{k} \otimes S|\bar{k}$ nach [Ht] III10 glatt, also (loc.cit.) singularitätenfrei, d.h. alle lokalen Ringe von $\bar{k} \otimes S$ haben projektive Dimension $= \dim(S)$. Durch treuflachen Abstieg folgt die analoge Behauptung für die lokalen Ringe von S selbst.) Wir werden Beispiele von Kurven X konstruieren, deren (singularitätenfreies)Modell C die Eigenschaft hat, daß $K \otimes_k C$ nicht mehr singularitätenfrei ist. Dies demonstriert zweierlei: C ist wegen 2.2.2 nicht glatt; und das Analogon von 2.2.2 mit "singularitätenfrei" anstelle von "glatt" ist falsch.

Jetzt sollen also Formen X von $\mathbb{A}^1$ betrachtet werden. Wir bemerken: Das (singularitätenfreie vollständige) Modell

von $\mathbb{A}_K^1$ ist $\mathbb{P}_K^1$, also sogar glatt. Es wird sich zeigen, daß die Formen von $\mathbb{A}_K^1$ mit glattem Modell eine Sonderrolle spielen.

(2.2.4) PROPOSITION. Sei X eine Form von $\mathbb{A}_K^1$, definiert durch den Kozyklus $\varphi \in \text{Aut}_{K[t]}(\mathbb{A}_{K[t]}^1)$ (siehe letzten Abschnitt). Dann ist das Modell C von X genau dann glatt, wenn bis auf Kohomologie φ Restriktion eines Kozyklus $\bar{\varphi} \in \text{Aut}_{K[t]}(\mathbb{P}_{K[t]}^1)$ ist.

BEWEIS: Da X affin und glatt, also singularitätenfrei ist, zeigt der Beweis von 2.2.1, daß X o.E. in C enthalten ist. Sei C glatt. Dann ist nach 2.2.2 auch $K \otimes_K C$ glatt, also ein Modell von $K \otimes X \cong \mathbb{A}_K^1$; demnach ist $K \otimes C$ über $K \otimes X \cong \mathbb{A}_K^1$ zu $\mathbb{P}_K^1$ isomorph.

Bisher haben wir nur Formen affiner Schemata (d.h. von k -Algebren) betrachtet. Nach [Gt]₁ p.5, Théoreme 3 gilt die übliche Theorie des treuflachen Abstiegs aber auch im Nicht-Affinen, weil $k \subset K$ radiziell ist. Die Theorie des ersten Abschnitts überträgt sich vollständig, mindestens bis zur Identifizierung von $K \otimes K \otimes X$ mit $K[t] \otimes X$.

Demnach definiert die Form C von $\mathbb{P}_K^1$ einen Automorphismus $\bar{\varphi}$ von $\mathbb{P}_{K[t]}^1$; nach Konstruktion ist die Restriktion von $\bar{\varphi}$ auf $\mathbb{A}_{K[t]}^1$ wohldefiniert und ein Kozyklus, der X beschreibt.

Sei andererseits $\bar{\varphi}$ irgendein Kozyklus in $\text{Aut}(\mathbb{P}_{K[t]}^1)$. Nach Lemma 2.2.5 ist $\bar{\varphi}$ auf der Punktmenge von $\mathbb{P}_{K[t]}^1$ (= Punktmenge von $\mathbb{P}_K^1$) die Identität, und deshalb läßt sich $\bar{\varphi}$ zu einem Kozyklus φ auf $\mathbb{A}_{K[t]}^1 = \mathbb{P}_{K[t]}^1 - \{\infty\}$ einschränken. Sei Y die durch φ definierte Form, C die durch $\bar{\varphi}$ definierte Form. Dann deszendiert sich die Inklusion $\mathbb{A}_K^1 \subset \mathbb{P}_K^1$, d.h. man erhält ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \hookrightarrow & C \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 K \otimes_K Y & \hookrightarrow & K \otimes_K C \\
 \parallel & & \parallel \\
 \mathbb{A}_K^1 & \subset & \mathbb{P}_K^1.
 \end{array}$$

Daraus folgt: C ist vollständig und glatt, und $Y \subset C$ ist eine offene Einbettung (etwa nach [Gt]₁ p.20 unten). Deshalb ist C das Modell von Y , und Y gehört zu φ , ist also isomorph zu X .

(2.2.5) LEMMA. Sei X ein k -Schema, φ ein Kozyklus in $\text{Aut}(K[t] \otimes X)$. Dann gilt

- a) Der kanonische Morphismus $\nu: K \otimes X \rightarrow X$ ist als Abbildung von topologischen Räumen ein Homöomorphismus.
- b) Bezeichne $\bar{}$ Reduktion mod t . Dann ist $\bar{\varphi} \in \text{Aut}(K \otimes X)$ die Identität.

BEWEIS: a) ν ist endlich, also auf Punkten surjektiv. Das Urbild von $x \in X$ ist $\text{Spec}(K \otimes_k \kappa(x))$, und wir behaupten: Diese Menge ist einpunktig. $K \otimes_k \kappa(x) \cong \kappa(x)[T]/(T^p - a)$. $T^p - a$ ist aber über dem Körper $\kappa(x)$ entweder irreduzibel oder p -te Potenz des linearen Polynoms $T - \alpha$. Deshalb ist $K \otimes \kappa(x)$ artinsch lokal, hat also einen einzigen Punkt zum Spektrum. Also ist ν bijektiv, und wegen der Quasikompaktheit von $K \otimes X$ sogar ein Homöomorphismus.

b) Wir bezeichnen mit $\bar{}$ auch die Abbildung $K[t, t'] \rightarrow K$, die t und t' auf Null setzt. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\eta_0} & \\
 K[t] & \xrightarrow{\eta_1} & K[t, t'] \\
 \downarrow \bar{} & \xrightarrow{\eta_2} & \downarrow \bar{} \\
 K & = & K
 \end{array}$$

Aus $\eta_2(\varphi) \eta_0(\varphi) = \eta_1(\varphi)$ folgt durch Anwenden von $\bar{}$ also $\bar{\varphi} \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$, was die Behauptung ergibt.

Wir wollen noch etwas mehr über Formen X von $\mathbb{A}^1$ mit glattem Modell C sagen. Der Fall $p=2$ spielt dabei eine Sonderrolle.

(2.2.6) SATZ. Sei $p = \text{char}(k) \neq 2$, X eine Form von $\mathbb{A}^1$.

Dann hat X genau dann ein glattes Modell C , wenn X in $\mathbb{P}^1$ eingebettet werden kann. (WARNUNG: Dies impliziert NICHT, daß $X \cong \mathbb{A}^1$.)

BEWEIS: Die Aussage "wenn, dann" ist klar ($C = \mathbb{P}^1$). Sei nun C glattes Modell von X . Dann ist $K \otimes C$ vollständig, glatt über K und birational zu $K \otimes X \cong \mathbb{A}_K^1$, d.h. $K \otimes C \cong \mathbb{P}_K^1$. Nach dem folgenden Satz ist $C \cong \mathbb{P}_K^1$, und die Behauptung ist gezeigt.

(2.2.7) SATZ. Sei $\text{char}(k)$ eine beliebige Primzahl p , $n \in \mathbb{N}$. Sei wie immer $K|k$ rein inseparabel, $[K:k] = p$.

- a) Die Formen von $\mathbb{P}^n$ bezüglich $K|k$ werden klassifiziert durch diejenigen Elemente der Brauergruppe $\text{Br}(K|k)$, die zu zentral einfachen k -Algebren der Dimension $(n+1)^2$ gehören. (Solche Formen von $\mathbb{P}^n$ heißen BRAUER-SEVERI-Schemata der Dimension n .) Hierbei entsprechen sich $\mathbb{P}^n$ und $M_{n+1}(k)$.
- b) Falls $p \nmid (n+1)$, dann sind alle Formen von $\mathbb{P}^n$ trivial.
- c) Für $p=2$ ist $\text{Br}(K|k) \cong k^+ / (b^2 + \partial(b) | b \in K)$, und diese Gruppe vom Exponenten 2 braucht nicht trivial zu sein.

BEWEIS: a) Die Azumayaalgebren (= zentral einfachen Algebren) der Dimension $(n+1)^2$ über k , die von K zerfällt werden, sind nichts anderes als die verzerrten Formen von $M_{n+1}(k)$ unter $K|k$, werden also durch $H^1(K|k, \underline{\text{Aut}}(M_{n+1}(k)))$ klassifiziert, und nach SKOLEM-NOETHER ist $\underline{\text{Aut}}(M_{n+1}(k)) \cong \underline{\text{PGL}}_{n+1}(k)$ ([Gt]₂, Cor. 5.11). Nach [Gt]₂ 8.1 klassifiziert die Menge $H^1(K|k, \underline{\text{PGL}}_{n+1}(k))$ aber auch die Isomorphieklassen von k -Schemata X mit $K \otimes_k X = \mathbb{P}_K^n$, den sogenannten Brauer-Severi-Schemata der Dimension n , weil $\underline{\text{PGL}}_{n+1}(k) = \underline{\text{Aut}}(\mathbb{P}_k^n)$. In dieser Korrespondenz entsprechen sowohl $\mathbb{P}^n$ wie auch $M_{n+1}(k)$ dem trivialen Element von $H^1(K|k, \underline{\text{PGL}}_{n+1}(k))$.

b) $\text{Br}(K|k)$ ist nach [Kn-O] Thm. V3.1 eine p -Torsionsgruppe. Wenn andererseits A eine k -Azumaya-Algebra der Dimension

$(n+1)^2$ ist, so gilt in $\text{Br}(K|k)$: $[A]^{n+1} = 0$ nach loc.cit., Thm. IV 6.1. Da $(p, n+1) = 1$, muß $[A]$ trivial sein, woraus mit a) die Behauptung folgt.

c) Nach [De-Ga] p.470 ist $H^2(K|k, \mu) \cong k^+ / (b^p + \partial^{p-1}(b) | b \in K)$
 $= k^+ / (b^2 + \partial(b) | b \in K)$. H^2 bedeutet wieder Amitsurkohomologie, und bekanntlich ist $H^2(K|k, \mu) = \text{Br}(K|k)$. Für $k := \mathbb{F}_2(u, v^2)$
 $\subset K = \mathbb{F}_2(u, v)$ kann man nachrechnen, daß $\{b^2 + \partial(b) | b \in K\}$
 $\neq k$.

Um den Fall $p=2$ noch näher zu untersuchen, müssen wir für allgemeines p noch feststellen, was die Relation "kohomolog" für Derivationen $D = F \cdot \frac{\partial}{\partial T} \in \text{Der}_K(K[T])$ bedeutet.

(2.2.8) LEMMA. Zwei Derivationen $D = F \frac{\partial}{\partial T}$ und $D_1 = F_1 \frac{\partial}{\partial T}$ gehören genau dann zu kohomologen Kozyklen, wenn es $e \in K^*$ und $b \in K$ gibt mit

$$F_1 = e \cdot F \left(\frac{T-b}{e} \right) + \frac{\partial(e)}{e} \cdot (T-b) + \partial(b) .$$

BEWEIS: Nach 2.1.6 sind D und D_1 genau dann kohomolog (i.e. gehören zu kohomologen Kozyklen), wenn $D_1 = D^\varphi + \partial \log(\varphi)$ für ein $\varphi \in \text{Aut}(K[T])$ ist. φ hat die Gestalt $\varphi(T) = eT + b$, mit $e \in K^*$ und $b \in K$ beliebig. Die Gleichung $D_1 = D^\varphi + \partial \log(\varphi)$ besagt jetzt für F_1 und F : $F_1 = D_1(T) = \varphi^{-1}(D(\varphi(T))) + \varphi^{-1}(\partial(\varphi(T))) = \varphi^{-1}(F \cdot e) + \varphi^{-1}(\partial(e) \cdot T + \partial(b))$
 $= F \left(\frac{T-b}{e} \right) \cdot e + \partial(e) \cdot \frac{T-b}{e} + \partial(b)$, q.e.d.

Als sofortiges Korollar ergibt sich, falls D und D_1 kohomolog sind: Entweder haben F_1 und F denselben Grad $n > 1$, oder beide haben Grad ≤ 1 . Wir definieren also den Grad einer verzerrten Form X von $\mathbb{A}^1$:

DEFINITION. Sei X eine Form von $\mathbb{A}^1$ mit zugehöriger Derivation $D = F \cdot \frac{\partial}{\partial T}$ von $K[T]$. Dann setzen wir

$$\deg(X) = n \quad \text{falls} \quad \deg(F) = n > 1;$$

falls $\deg(F) = 0$ oder 1, schreiben wir
 $\deg(X) \leq 1$.

Dies ist nach dem oben Gesagten wohldefiniert.
 Jetzt können wir folgenden Satz formulieren:

(2.2.9) SATZ. Sei $p = 2$. Dann sind die Formen X von $\mathbb{A}^1$ mit glattem Modell C genau die Formen mit $\deg(X) \leq 2$.
 (D.h.: $\deg(X) \leq 1$ oder $\deg(X) = 2$.)

BEWEIS: Gehöre X zu der Derivation $D = F_{\partial T}^2$. Wegen der Wohldefiniertheit von $\deg$ reicht es nach 2.2.4 zu zeigen: $\deg(F) \leq 2$ genau dann, wenn $[\exp](tD)$ Restriktion eines Kozyklus $\Phi \in \text{Aut}_{K[t]}(\mathbb{P}_{K[t]}^1)$ ist. Da $p=2$, ist $[\exp](tD) = \text{id} + tD$. Falls Φ existiert, ist es automatisch Kozyklus. Φ sowohl wie auch $\text{id} + tD$ sind von vornherein die Identität auf den Punkten, man kann also ansetzen $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, wobei Φ_1 Automorphismus von $\text{Spec}(K[t][T])$ und Φ_2 Automorphismus von $\text{Spec}(K[t][T])$ sind, welche kompatibel sind (i.e. auf dem Durchschnitt $\text{Spec}(K[t][T, T^{-1}])$ übereinstimmen). Also ist $\Phi_1 = \text{Spec}(\text{id} + tD)$, und die einzige Frage ist: Wann kommt $(\Phi_1)_T$ von einem Automorphismus von $K[t][T^{-1}]$? Hierzu berechnen wir $(\Phi_1)_T(T^{-1}) = (\Phi_1(T))^{-1} = (T + t \cdot F)^{-1} = (1 + t \cdot F/T) \cdot T^{-1} = (1 - t \cdot F/T) \cdot T^{-1} = T^{-1} - t \cdot F \cdot T^{-2}$. Genau dann, wenn dieser Ausdruck in $K[t][T^{-1}]$ liegt, kommt $(\Phi_1)_T$ von einem Automorphismus von $K[t][T^{-1}]$. Wir bekommen also als Bedingung: $F \cdot T^{-2} \in K[t][T^{-1}]$, und das heißt gerade $\deg(F) \leq 2$.

(2.2.10) SATZ. Sei $p = 2$, X eine Form von $\mathbb{A}^1$.

- a) Genau dann hat X Grad ≤ 1 , wenn X trivial ($\cong \mathbb{A}^1$) ist.
- b) Die Formen X mit glattem Modell C entsprechen eindeutig den Elementen der Brauergruppe $\text{Br}(K|k)$.

BEWEIS: a) Eine Richtung ist trivial, denn $X \cong \mathbb{A}^1$ gehört u.a. zur Derivation Null. Umgekehrt ist zu zeigen: Falls $\deg(F) \leq 1$ und $F \cdot F' + F_\alpha (= F_{[2]}) = 0$, dann ist $F_{\partial T}^2$

nullkohomolog (vgl. 2.2.8). Nach 2.1.16 kann man annehmen, daß F keinen linearen Term hat, d.h. $F = c \in K$. Die Relation $F_{[2]} = 0$ liefert $c \in k$. Wenn man in 2.2.8 $e=0$, $b=\alpha c$ setzt, bekommt man: F ist kohomolog zu $F_1 = 0$. (N.B. $\partial(b) = c!$)

b) Gehöre X zur Derivation $D = F \frac{\partial}{\partial T}$, $\deg(F) \leq 2$. Nach 2.1.16 weiß man, daß man den Koeffizienten von T durch Übergang zu einer kohomologen Derivation zu Null machen kann. Wir brauchen also nur Polynome F der Form $d + eT^2$ zu betrachten. Wie man leicht nachrechnet, ist $(d + eT^2) \cdot \frac{\partial}{\partial T}$ (via $\varphi: T \mapsto eT$) kohomolog zu $(d_1 + T^2) \cdot \frac{\partial}{\partial T}$. Wegen der Relation für $F = d_1 + T^2$ ($F_{[2]} = 0$) muß gelten $\partial(d_1) = 0$, also $d_1 \in k$. Es stellt sich jetzt heraus, daß $d_1 + T^2$ und $d_2 + T^2$ genau dann kohomolog sind, wenn $d_1 = d_2 + (b^2 + b_\alpha)$ für ein $b \in K$. Denn sei $(d_1 + T^2) \sim (d_2 + T^2)$ via $\rho: T \mapsto cT + b$. Es ergibt sich aus 2.2.8:

$$\begin{aligned} d_2 + T^2 &= c \cdot (d_1 + (\frac{T-b}{c})^2) + \frac{c_\alpha}{c} \cdot (T-b) + b_\alpha \\ &= cd_1 + \frac{T^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{c_\alpha}{c} \cdot T + \frac{bc_\alpha}{c} + b_\alpha, \end{aligned}$$

also $c = 1$, $c_\alpha = 0$; $d_2 = d_1 + b^2 + b_\alpha$. Die umgekehrte Rechnung geht genauso.

BEMERKUNG. Für den Fall, daß X einen k -rationalen Punkt hat, kann man Satz 2.2.6 auch aus [Ka-M-Ta] 6.7.9 ableiten.

(2.3) Formen von $\mathbb{A}^1$ und ihr arithmetisches Genus.

Wie im vorigen Abschnitt fixieren wir einen Körper k der Charakteristik p und eine (rein) inseparable Erweiterung $K = k(\alpha)$ vom Grad p , und wir betrachten Formen von $\mathbb{A}^1$, d.h. (affine algebraische) k -Schemata X mit $K \otimes_k X \subseteq \mathbb{A}^1_K$. Eine der wichtigsten Invarianten von algebraischen Kurven ist das Genus. Da nicht alle betrachteten Kurven glatt sind, müssen wir zwischen arithmetischem und

geometrischem Genus unterscheiden. Wir werden uns nur mit dem arithmetischen Genus beschäftigen. Zunächst die Definition:

(2.3.1) DEFINITION. a. Sei Y eine vollständige Kurve über k . (Kurven sind bei uns immer irreduzibel.) Das arithmetische Genus $p_a(Y)$ ist die k -Dimension von $H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$. H^* bezeichnet dabei die übliche Čechkohomologie von Schemata (vgl. das Lehrbuch von Hartshorne [Ht]).

b) Wenn Z eine beliebige Kurve über k ist, so setzt man $p_a(Z) := p_a(C)$, wobei C das (vollständige reguläre) Modell von Z ist. Dies ist nach 2.2.1 wohldefiniert. Falls Z regulär ist, so ist Z in C eingebettet.

BEISPIEL. $p_a(\mathbb{A}^1) = p_a(\mathbb{P}^1) = \dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$. Allgemein gilt für glatte vollständige Kurven Y nach dem SERRESchen Dualitätssatz: $p_a(Y) = p_g(Y) := \dim H^0(Y, \Omega_Y)$.

Sei im folgenden X eine Form von $\mathbb{A}^1$, C das Modell von X . Wir setzen zur Abkürzung $X' = K \otimes_k X$, $C' = K \otimes_k C$, "und so fort mit Grazie" (Goethe).

(2.3.2) LEMMA. a) $C - X$ besteht nur aus einem Punkt ω . Der Restklassenkörper $\kappa_C(\omega)$ ist entweder k oder K .

b) Falls ω k -rational ist, d.h. $\kappa_C(\omega) = k$, dann ist C glatt.

BEWEIS: a) Die Normalisierung von C' ist das Modell von $X' \cong \mathbb{A}_K^1$, d.h. man hat eine endliche Surjektion $\mathbb{P}_K^1 \rightarrow C'$, die auf $\mathbb{A}_K^1$ ein Isomorphismus ist. Also kann $C' - X'$ nur aus einem Punkt bestehen, nämlich dem Bild von $\omega_K \in \mathbb{P}_K^1$. ($C' = X'$ ist nicht möglich, da X' affin und C' vollständig ist.) Weil nach Lemma 2.2.5a) $C' \rightarrow C$ und $X' \rightarrow X$ Bijektionen auf den zugrundeliegenden Punktmengen sind, folgt: $C - X =: \{\omega\}$ ist einpunktig. Bezeichne ω' den Punkt von C' über ω . Da ω' Bild des unendlich fernen Punkts von $\mathbb{P}_K^1$ ist, ist ω' K -rational, und somit ist $\kappa(\omega) \subset K$. Da $[K:k]$ prim ist, folgt die Behauptung.

b) Wenn man zeigen kann, daß C' regulär ist, dann ist

C' (da vollständig) Modell von $X' \cong \mathbb{A}_K^1$, also glatt ($\cong \mathbb{P}^1$), und mit 2.2.2 folgt die Glattheit von C .

Da $\mathbb{A}_K^1 \cong X' \subset C'$ glatt ist, ist der einzige zu betrachtende Punkt von C' der Punkt ω' . Das schematische Urbild von $\text{Spec}(\mathcal{O}_{C,\omega})$ ist $\text{Spec}(K \otimes_K \mathcal{O}_{C,\omega})$, aber da über ω nur ein Punkt liegt, muß $K \otimes_K \mathcal{O}_{C,\omega}$ lokal und gleich $\mathcal{O}_{C',\omega'}$ sein. Es reicht zu zeigen: Dieser Ring $S := \mathcal{O}_{C',\omega'}$ ist ein diskreter Bewertungsring. Sei hierzu π ein Parameter von $\mathcal{O}_{C,\omega}$, d.h. $\pi\omega = \pi \cdot \mathcal{O}_{C,\omega}$. Wir behaupten: S ist ein maximales Ideal von S (damit sind wir fertig). Es ist $S/\pi S = K \otimes \mathcal{O}_{C,\omega} / K \otimes (\pi) = \cong K \otimes \kappa_C(\omega)$. Nach Voraussetzung ist der letzte Ring ein Körper, q.e.d.

N.B. Falls $\kappa_C(\omega) = K$, kann C glatt sein, muß es aber nicht. Siehe das folgende!

Zum Rechnen mit p_a brauchen wir ein technisches Lemma:

(2.3.3) LEMMA. Sei (nur für diese Lemma) $K:k$ eine beliebige Körpererweiterung, X ein k -Schema, $X' = K \otimes_k X$ etc. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$K \otimes_k H^i(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\cong} H^i(X', \mathcal{O}_{X'}) \quad (i \geq 0).$$

BEWEIS: Sei $\mathcal{X} := \{U_1, \dots, U_n\}$ eine endliche affine Überdeckung von X . Dann ist $\mathcal{X}' := \{U_1', \dots, U_n'\}$ eine endliche affine Überdeckung von X' , und nach [Ht] III 4.5 kann man die Kohomologie von X bzw. X' mittels des zu $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{X}'$ gehörenden Čech-Komplexes ausrechnen. Bezeichnen wir die Menge der Multiindizes α der Länge m mit Werten in $\{1, \dots, n\}$ mit I_m , so haben wir den Čech-Komplex

$$0 \rightarrow \prod_{I_1} \mathcal{O}_X(U_\alpha) \rightarrow \prod_{I_2} \mathcal{O}_X(U_\alpha) \rightarrow \dots,$$

wobei gesetzt ist $U_\alpha = U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_m}$. Entsprechendes gilt für X' , und die gesuchten H^i sind die Kohomologiegruppen des jeweiligen Komplexes. Es reicht also zu zeigen, daß $\mathcal{O}_{X'}(U')$

kanonisch zu $K \otimes \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ isomorph ist. Zunächst ist $U'_\alpha \cong (U_\alpha)'$, da Tensorieren mit Durchschnittsbildung kommutiert (beides ist in Sch_K ein Limes). Ferner sind alle U_α als Durchschnitte affiner Unterschemata des separierten Schemas X wieder affin ([Ht] p.106), und deswegen gilt definitionsgemäß $\mathcal{O}_X(U'_\alpha) \cong \mathcal{O}_X(U_\alpha)' = (\text{Koordinatenring des affinen Schemas } K \otimes \mathcal{O}_X(U_\alpha))' = K \otimes \mathcal{O}_X(U_\alpha)$.

Sei jetzt K wie früher, und X eine Form von $\mathbb{A}^1$ mit Modell C , $\{\omega\} = C - X$. Ein erster Schritt zur Bestimmung des arithmetischen Genus $p_a(X)$ ist folgender Satz:

(2.3.4) SATZ. $S (= K \otimes \mathcal{O}_{C,\omega})$ ist ein Integritätsring, und

$$p_a(X) = \dim_K(\overline{S}/S),$$

wobei $\overline{}$ die Normalisierung eines Ringes bedeutet.

BEWEIS: $S = K \otimes \mathcal{O}_{C,\omega} \cong \mathcal{O}_{C,\omega}[T]/(T^p - a) \subset L[T]/(T^p - a)$ mit $L = \text{Quot}(\mathcal{O}_{C,\omega})$. Für die Nullteilerfreiheit von S ist also hinreichend, daß $T^p - a$ über L irreduzibel ist, d.h. $\alpha \notin L$. L ist aber der Funktionenkörper $\kappa(C)$. $\alpha \in L$ würde also implizieren, daß α eine rationale Funktion auf X (oder C) ist, und da $\alpha|_K$ ganz ist, und X normal, wäre α im Koordinatenring von X . Dann kann aber $K \otimes X$ nicht reduziert sein, im Widerspruch zu $K \otimes X \cong \mathbb{A}_K^1$.

Nach dem Beweis von 2.3.2 ist $S = \mathcal{O}_{C',\omega'}$ und ω' ist K -rational. Also hat S den Restklassenkörper K , und deshalb ist $\dim_K(\overline{S}/S)$ die Länge von $\overline{S}/S$ als S -Modul. Ferner ist $p_a(X) = p_a(C)$. Nach Satz 2.3.3 und Def. 2.3.1a) ist $p_a(C) = p_a(K \otimes_K C) = p_a(C')$. (NB. C' braucht nicht glatt zu sein.)

Die Normalisierung von C' ist $\mathbb{P}_K^1$ wie in 2.3.2, hat also arithmetisches Genus Null. Da über ω' nach dem Beweis von 2.3.2 nur ein Punkt der Normalisierung liegt, folgt die behauptete Gleichung aus [Ht] p.298, ex.1.8.

Diesen Satz kann man wie folgt verdeutlichen: Sollte

C glatt sein, dann ist es auch C' , d.h. S ist schon normal und $p_a(X) = 0$. Die Umkehrung gilt auch: Ist S normal, so ist C' regulär, und wie in 2.3.2b) folgt: C ist glatt. $p_a(X)$ mißt also in gewissem Sinne, wie stark X im Unendlichen von der Glattheit abweicht.

(2.3.5) BEMERKUNG und NOTATION. Da $\bar{S}$ lokal ist (über ω' liegt nur ein Punkt der Normalisierung, s.o.), ist die Kompletztierung $\hat{\bar{S}}$ von $\bar{S}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring, denn $\bar{S}$ ist normal. $\hat{\bar{S}}$ hat den Restklassenkörper K und ist K -Algebra; nach dem COHENschen Struktursatz ist also $\hat{\bar{S}} = K[[t]]$, $t \in \hat{\bar{S}}$ transzendent. Man kann $t \in \bar{S}$ wählen, etwa das erzeugende Element von $\underline{m}_{\bar{S}}$, und wir nennen t einen Parameter von $\hat{\bar{S}}$.

Um den Übergang zur Kompletztierung beim Studium von S und $\bar{S}$ zu rechtfertigen, benötigen wir ein Lemma:

(2.3.6) LEMMA. Sei A ein lokaler noetherscher reduzierter Ring der Krulldimension 1, $\bar{A}$ eine in $\text{Quot}(A)$ enthaltene endliche lokale Erweiterung von A . Sei $\hat{A}$ die $\underline{m}_A$ -adische Kompletztierung von A , $\underline{n}$ das maximale Ideal von $\bar{A}$ und $\hat{\bar{A}}$ die $\underline{n}$ -adische Kompletztierung von $\bar{A}$. Dann gilt $\hat{A} \subset \hat{\bar{A}}$ und

$$\bar{A}/A \cong \hat{\bar{A}}/\hat{A} \quad \text{als } A\text{-Moduln.}$$

BEWEIS: Sei $\sim$ der Funktor " $\underline{m}_A$ -adische Vervollständigung" von $A\text{-Mod}$ nach $\hat{A}\text{-Mod}$. Auf endlich erzeugten A -Moduln ist $\sim$ exakt. Der Konduktor $\underline{c}$ von $\bar{A}$ in A enthält einen Nichtnullteiler, und wegen der Krulldimension folgt, daß $A/\underline{c}$ artinsch ist, d.h. $\underline{c}$ enthält eine Potenz $\underline{m}_A^N$ ($N > 0$). Weil $\bar{A}/A$ ein $A/\underline{c}$ -Modul ist, ist $\underline{m}_A^N(\bar{A}/A) = 0$, also

$(\bar{A}/A)^\sim = \bar{A}/A$. Also ist wegen $A^\sim = \hat{A}$ nur noch zu beweisen: $\bar{A}^\sim \cong \hat{\bar{A}}$. Es ist $\bar{A}^\sim = \varprojlim \bar{A}/\underline{m}_A^j \bar{A}$ und $\hat{\bar{A}} = \varprojlim \bar{A}/\underline{n}^j$; somit genügt es uns, wenn die Idealfolgen $(\underline{m}_A^j \bar{A})$ und $(\underline{n}^j)$ zueinander kofinal sind. Offenbar ist $\underline{m}_A^j \bar{A} \subset \underline{n}^j$. Andererseits ist $\underline{c}$ auch als $\bar{A}$ -Ideal primär, d.h. $\underline{c} \supset \underline{n}^M$ ($M > 0$).

Daraus folgt $\underline{n}^{1(M+1)} \subset (\underline{n} \cdot \underline{c})^1 \bar{A} \subset \underline{m}_A^1 \bar{A}$, denn $\underline{nc}$ ist ein echtes Ideal von A . q.e.d.

In unserem Fall ist also $\hat{S} \subset \hat{\bar{S}} = K[[t]]$, und uns interessiert die K -Dimension des Quotienten. Für den Moment vergessen wir einmal, wie S entstanden ist. Sei also allgemein $K \subset A \subset K[[t]]$ ein noetherscher lokaler Unterring, $\dim_K(K[[t]]/A) < \infty$, $\text{Quot}(A) = K((t))$. Wir verwenden die Technik der sogenannten Wertehalbgruppen, vgl. [An]. Sei $v: K[[t]] - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ die kanonische Bewertung ($v(t^i + \dots) = i$). Wir definieren die Werte-Halbgruppe(!) von A wie folgt: $H(A) := \{v(a) \mid a \in A - \{0\}\}$. Für $A = K[[t]]$ ist natürlich die Halbgruppe $H(A) = \mathbb{N}$. (Man kann sogar sagen: $A = K[[t]]$ genau dann wenn $H(A) = \mathbb{N}$ und A in $K[[t]]$ t -adisch abgeschlossen ist.)

(2.3.7) SATZ. Unter obigen Voraussetzungen ist $\dim_K(K[[t]]/A) = \text{card}(\mathbb{N} - H)$.

(Dieser Satz dürfte wohlbekannt sein, aber wir haben keine geeignete Referenz.)

BEWEIS: Sei $\underline{c}$ der Konduktor von $K[[t]]$ in A . Wie im Beweis von 2.3.6 folgt: $t^M \in \underline{c}$ ($M \gg 0$). Dann ist natürlich $[M, \infty) \subset H(A)$. Wir behaupten: $B := \{t^i \mid i \in \mathbb{N} - H\}$ liefert eine K -Basis von $K[[t]] \bmod A$.

B ist Erzeugendensystem mod A : Da $t^M K[[t]] \subset \underline{c} \subset A$, reicht es, alle t^j , $0 \leq j < M$, zu erzeugen. Daß dies möglich ist, zeigt man durch absteigende Induktion über j : Sei bereits gezeigt, daß $t^j \in K\text{-span}(B) + A$ für alle $j_0 < j < M$. 1. Fall: $j_0 \in \mathbb{N} - H$. Dann ist $t^{j_0} \in B$, und nichts ist zu zeigen. 2. Fall: $j_0 \in H$. Dann existiert ein $a \in A$ mit $v(a) = j_0$, d.h. $a = a_0 \cdot t^{j_0} + \text{höhere Terme}$, $a_0 \neq 0$. Die höheren Terme liegen nach Voraussetzung schon in $K\text{-span}(B) + A$, also kann man auch t^{j_0} erzeugen.

B ist linear unabhängig mod A : Seien $\alpha_j \in K$, $\sum_{j \in \mathbb{N} - H} \alpha_j t^j - c = 0$, $c \in A$. Dann haben alle nichtverschwindenden Summanden in dieser Summe bei v einen verschiedenen Wert. Deshalb müssen alle Summanden Null sein, q.e.d.

Um dieses Lemma anwenden zu können, brauchen wir noch einige technische Ergebnisse:

(2.3.8) SATZ. Sei $A = K[[f, g]] \subset K[[t]]$, und seien $i := v(f)$ und $j := v(g)$ teilerfremde positive Zahlen. (Mit $K[[f, g]]$ ist kein Potenzreihenring in zwei Variablen gemeint, sondern der t -adische Abschluß von $K[f, g]$ in $K[[t]]$. A ist lokal und vollständig, und epimorphes Bild von $K[[X, Y]]$.) Dann wird das Monoid $H(A)$ von i und j erzeugt.

BEWEIS (vgl. [An] Kor. II 1.5): Sei $H_0 \subset H(A)$ das von i und j erzeugte Untermonoid von $\mathbb{N}$. Wir behaupten: Alle $n \geq i \cdot j$ liegen in H_0 . Es gibt nämlich unter den Zahlen $\{j, 2j, \dots, ij\}$ genau eine Zahl $rj \equiv n \pmod{i}$, denn mit r durchläuft rj ein volles Restsystem mod i . $n - rj$ ist dann ein nichtnegatives Vielfaches von i , d.h. $n \in H_0$. Jetzt wird behauptet: Für $n \geq ij$ ist bereits $t^n \in A$. (Damit folgt $t^{ij} K[[t]] \subset A$.) Da $n \in H_0$, gibt es $a_n \in A$, mit $a_n = t^n + s_{n+1}$, $v(s_{n+1}) \geq n+1$. Dann gibt es (wegen $n+1 \in H_0$) ein $a_{n+1} \in A$ mit $a_{n+1} = s_{n+1} + s_{n+2}$, $v(s_{n+2}) \geq n+2$, etc. Dann ist die Summe $a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - \dots$ wohldefiniert, in A , und gleich t^n nach Konstruktion. Mit diesen Vorbereitungen können wir den eigentlichen Beweis führen:

Sei $x \in A - \{0\}$; zu zeigen ist $v(x) \in H_0$. Ohne Einschränkung (s.o.) sei $v(x) < ij$. Wenn man zu x eine Potenzreihe der Ordnung $\geq ij$ addiert, ändert sich $v(x)$ nicht, und man bleibt wegen $t^{ij} K[[t]] \subset A$ in A . Also kann man x als Polynom in f und g ansetzen:

$$x = \sum_{\substack{0 \leq \gamma, \delta \\ i\gamma + j\delta < ij}} x_{\gamma, \delta} f^\gamma g^\delta \quad (x_{\gamma, \delta} \in K).$$

Behauptung: In dieser Summendarstellung haben keine zwei verschiedenen nichtverschwindenden Summanden denselben Wert unter v . Beweis: Sei o.B.d.A. $i < j$, und sei $v(f^\gamma g^\delta) = v(f^\varepsilon g^\zeta) < ij$, wobei o.E. $\gamma \leq \varepsilon$. Durch Kürzen folgt $v(g^\delta) = v(f^{\tilde{\varepsilon}} g^{\tilde{\zeta}})$, $\tilde{\varepsilon} \geq 0$. Also ist $\delta \geq \tilde{\zeta}$, und man erhält $v(g^\delta) = v(f^{\tilde{\varepsilon}})$,

$\tilde{\delta}, \tilde{\epsilon} \geq 0$. Deshalb ist $\tilde{\delta}i = \tilde{\epsilon}j$, und demnach $j|\tilde{\delta}$. Falls $\tilde{\delta} \neq 0$, folgt $j^2 \leq i\tilde{\delta} \leq j\delta \leq v(f^i g^j) \leq ij$, Widerspruch! $\tilde{\delta} = 0$ ist aber nur möglich, wenn auch $\tilde{\epsilon} = 0$, und dies bedeutet $\delta = \epsilon$, $\gamma = \epsilon$, und das war zu zeigen.

Also kann man aus der obigen Summendarstellung ablesen: $v(x)$ ist das Minimum der Werte der einzelnen Summanden rechts, also sicher von der Form $i\gamma + j\delta$, q.e.d.

BEMERKUNGEN. Der Satz wird falsch sowohl für $\text{ggT}(i,j) > 1$ als auch für den Fall, daß $A = K[[f,g,h]]$ im obigen Sinne. Beispiele:

1) Für $A = K[[t^2, t^2+t^3]]$ ist $i = j = 2$, und $H(A) = \mathbb{N} \cdot 2 + \mathbb{N} \cdot 3 \neq \mathbb{N} \cdot 2$.

2) Für $A = K[[t^{10}, t^{13}, t^{17}+t^{18}]]$ ist $t^{31} \in A$, aber 31 liegt nicht in $\mathbb{N} \cdot 10 + \mathbb{N} \cdot 13 + \mathbb{N} \cdot 17$. (N.B. 10, 13, 17 sind sogar paarweise teilerfremd.)

Zu 1) ist anzumerken: In $[A_n]$ werden diejenigen Wertehalbgruppen H charakterisiert, die für $A = K[[f,g]]$, $v(f)$ und $v(g)$ nicht unbedingt teilerfremd, auftreten können. H braucht nicht einmal von zwei Elementen erzeugbar sein.

Um den Bezug zu unserer Situation herzustellen, müssen wir den Ring $\hat{S}$ (und seine Einbettung nach $\hat{S} \cong K[[t]]$) noch genauer bestimmen. Seien die Bezeichnungen wie vor 2.3.2; wir erinnern an $S = K \otimes \mathcal{O}_{C, \infty} = \mathcal{O}_{C', \infty}$. Nach 2.3.4 ist $p_a(X) = 0$, falls C glatt ist. Wir schließen jetzt also ausdrücklich aus, daß C glatt ist. Nach dem Beweis von 2.3.2 b) kann C' und damit S nicht regulär sein. S ist also lokal, aber kein diskreter Bewertungsring. Nach 2.3.2 a) ist $\kappa_C(\infty) = K$. Wir setzen zur Abkürzung $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{C, \infty}$ und $\underline{m} = \underline{m}_{C, \infty}$. Da $\mathcal{O}/\underline{m} = K \neq k$, ist das Cohensche Strukturtheorem nicht anwendbar, um $\hat{\mathcal{O}}$ auszurechnen, und wir müssen es direkt tun. Sobald wir $\hat{\mathcal{O}}$ kennen, haben wir auch $\hat{S}$ in der Hand, denn: $K \otimes \hat{\mathcal{O}} = (K \otimes \underline{m})$ -adische Vervollständigung von $(K \otimes \mathcal{O} = S)$ ist dasselbe wie die Vervollständigung von S nach seinem maximalen Ideal, und deshalb $K \otimes \hat{\mathcal{O}} \cong \hat{S}$. $\hat{S}$ ist der ganze Abschluß von $\hat{S}$ (2.3.5).

Da C regulär ist, ist $\hat{O}$ ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\hat{m} = (\pi)$. Sei ferner $s_0 \in \hat{O}$ mit $\overline{s_0} = \alpha \in K$. (Zur Erinnerung: $K = k(\alpha)$, $\alpha^p \in k$.)

Nach diesen Vorbereitungen können wir den folgenden wichtigen Struktursatz für $\hat{O}$ beweisen:

(2.3.9) SATZ. Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie oben. Dann gilt:

- a) $\hat{O} \cong k[[\pi]][s]/(s^p - a - \pi f)$ für ein $f \in k[[\pi]][s]$.
 (Hierbei ist $k[[\pi]]$ ein Potenzreihenring, dessen Variable wir π nennen, weil sie dem Parameter $\pi \in \hat{O}$ entspricht.)
- b) In a) kann man $f \in \sum_{i=0}^{p-1} s^i k[[\pi]]$ wählen.

BEWEIS: a) π liegt im maximalen Ideal des vollständigen lokalen Rings $\hat{O}$, man erhält also eine Einbettung(!) $k[[\pi]] \rightarrow \hat{O}$, und somit einen Morphismus $\varphi: k[[\pi]][s] \rightarrow \hat{O}$ mit $\varphi(\pi) = \pi$, $\varphi(s) = s_0$. Wir behaupten, daß φ surjektiv ist. Da $\hat{O}$ ein diskreter Bewertungsring ist, gilt $K \cong \underline{m}^i / \underline{m}^{i+1}$ (via $1 \mapsto \pi^i$) für alle i . Deshalb kann man jedes Element von $\underline{m}^i \bmod \underline{m}^{i+1}$ in der Form $\pi^i \cdot h(s_0)$ darstellen, mit $h \in k[[T]]$, $\deg(h) < p$. Wenn jetzt $r \in \hat{O}$ beliebig gegeben ist, so wählt man sukzessive

$$\begin{aligned} h_0(s_0) & \text{ mit } r \equiv h_0(s_0) \bmod \underline{m}; \\ h_1(s_0) & \text{ mit } r - h_0(s_0) \equiv \pi \cdot h_1(s_0) \bmod \underline{m}^2; \\ h_2(s_0) & \text{ mit } r - h_0(s_0) - \pi h_1(s_0) \equiv \pi^2 \cdot h_2(s_0) \bmod \underline{m}^3 \\ & \text{usf.} \end{aligned}$$

Dann ist $u = \sum_{i=0}^{\infty} \pi^i h_i(s_0)$ ein wohldefiniertes Element von $k[[\pi]][s]$ mit $\varphi(u) = r$, φ ist also surjektiv.

Weil $k[[\pi]][s]$ faktoriell und zweidimensional, $\hat{O}$ aber eindimensional ist, muß $\text{Ke}(\varphi)$ ein Hauptideal (G) sein. Weil $k[[\pi]][s]/(G, \pi) \cong \hat{O}/(\pi) \cong K$ ist, wobei $s \mapsto \alpha$, muß $G \bmod \pi$ bis auf eine Konstante aus k^* das Minimalpolynom von α über k sein, d.h. o.E.:

$$G = s^p - a - \pi f \quad \text{für ein } f \in k[[\pi]][s].$$

b) Wir wollen f ändern, ohne daß sich das Ideal $(s^p - a - \pi f) = (G)$ dabei ändert. Für jedes Polynom $F \in k[[\pi]][s]$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome F_1, F_2 mit $F = F_1 + (s^p - a) \cdot F_2$, mit $F_1 \in \sum_{i=0}^{p-1} s^i k[[\pi]]$ (Division mit Rest durch $s^p - a$). Die folgenden Rechnungen in $k[[\pi]][s]$ sind alle mod (G) zu lesen:

$$\begin{aligned} s^p - a &= f = \pi f_1 + (s^p - a) f_2 & (\text{mod } G) \\ &= \pi f_1 + \pi^2 f \cdot f_2 \\ &= \pi f_1 + \pi^2 (ff_2)_1 + \pi^2 (s^p - a) (ff_2)_2 \\ &= \pi f_1 + \pi^2 (ff_2)_1 + \pi^3 f \cdot (ff_2)_2 \\ &= \pi f_1 + \pi^2 (ff_2)_1 + \pi^3 (f \cdot (ff_2)_2)_1 + \pi^4 f \cdot (f(ff_2)_2)_2, \end{aligned}$$

also für jedes n :

$$s^p - a = \pi \cdot g_1 + \pi^2 g_2 + \dots + \pi^n g_n + \pi^{n+1} h_n, \quad (G)$$

mit $g_i \in \sum_{j=0}^{p-1} s^j k[[\pi]]$, $h_n \in k[[\pi]][s]$.

Das Element $g := \sum_{i=1}^{\infty} \pi^{i-1} g_i \in k[[\pi]][s]$ ist also wohldefiniert, und weil $\hat{O}$ π -adisch separiert ist, gilt im Faktorring $k[[\pi]][s]/(G) \cong \hat{O}$ auch die Limes-Relation

$$s^p - a = \pi \cdot g, \quad \text{wobei } g \in \sum_{j=0}^{p-1} s^j k[[\pi]] \quad (g := \sum \pi^{i-1} g_i!).$$

Also gilt in $k[[\pi]][s]$: $s^p - a - \pi g \in (s^p - a - \pi f) = (G)$. Daß die Ideale $(s^p - a - \pi g)$ und $(s^p - a - \pi f)$ tatsächlich gleich sind, zeigt man am bequemsten durch Nachweis der Irreduzibilität von $s^p - a - \pi g$, die man z.B. mod π testen kann ($s^p - a$ ist ja das Minimalpolynom von $\alpha|k$, also irreduzibel.) Somit kann man f durch g ersetzen und hat b) bewiesen.

Jetzt gehen wir zum Ring $\hat{S} \cong K \hat{\otimes}_k \hat{O}$ über.

(2.3.10) SATZ. Seien die Voraussetzungen wie oben; insbesondere sei C nicht glatt. Wir identifizieren (nach 2.3.5) den ganzen Abschluß von $\hat{S}$ mit $K[[t]]$ und können also von der Wertehalbgruppe $H(\hat{S})$ sprechen. Dann existiert ein $i > 1$, $i \notin p\mathbb{Z}$, sodaß $H := H(\hat{S})$ von p und i als Monoid erzeugt wird.

BEWEIS: Nach 2.3.9 b) ist $\hat{S} \cong K \otimes \hat{O} \cong K \otimes (k[[\pi]][s]/(s^p - a - \pi f)) \cong K[[\pi]][s]/(s^p - a - \pi f)$ mit $f \in \sum_{i=0}^{p-1} s^i K[[\pi]]$. Mit der linearen Variablensubstitution $s_1 = s - \alpha$ ($\alpha \in K!$) bekommt man für $\hat{S}$ die neue Präsentation

$$(*) \quad \hat{S} \cong K[[\pi]][s_1]/(s_1^p - \pi g) =: R \quad (g(s_1) = f(s)).$$

$$\text{Es ist } f = \sum_{j=0}^{p-1} f_j \cdot s^j, \quad f_j \in k[[\pi]], \text{ also } g = \sum_{j=0}^{p-1} f_j \cdot (s_1 + \alpha)^j.$$

Für ein beliebiges $0 \neq h = \sum h_j s^j$ ($h_j \in k[[\pi]]$) definieren wir $w(h) = \min(v(h_j) | j \in \mathbb{N})$. $w(h)$ ist also der Exponent der höchsten Potenz von π , die man aus allen h_j simultan ausklammern kann. Wir wollen letzten Endes erreichen, daß $i := w(g)$ nicht durch p teilbar ist. Hierzu bedarf es aber eines weiteren Variablenwechsels $s^* = s_1 + q$, $q \in k[[\pi]]$ geeignet zu wählen.

Wir definieren induktiv Elemente $q_i \in K[[\pi]]$ ($i > 0$), so daß mit $s_i = s_1 + q_i$ (insbes. $q_1 = 0$) in R die Relation gilt

$$s_i^p = \sum_{j=0}^{p-1} f_j^{(i)} (s_1 + \alpha)^j,$$

wobei die $f_j^{(i)}$ in $k[[\pi]]$ sind. Die Konstruktion lassen wir abbrechen, sowie $w(\sum f_j^{(i)} (s_1 + \alpha)^j)$ nicht mehr durch p teilbar ist. Solange die Konstruktion nicht abbricht, soll ferner gelten:

$w(\sum_{j=0}^{p-1} f_j^{(i)} (s_1 + \alpha)^j)$ wächst mit i strikt an, insbesondere $v(f_j^{(i)}) \geq i$.

Zur Konstruktion selbst: Für $i=1$ setzt man $q_1 = 0$, $f_j^{(1)} = \pi f_j$. Induktionsschritt: Seien $q_i, f_j^{(i)}$ bereits konstruiert, und

sei $w(\sum_{j=0}^{p-1} f_j^{(i)}(s_1 + \alpha)^j) = n \cdot p$. Da schon $\pi | f_j^{(1)}$, kann n nicht Null sein. Wir bekommen: $f_j^{(i)} = \pi^{np} \cdot f_j^*$ für $j = 0, \dots, p-1$ und $f_j^* \in k[[\pi]]$. Ferner ist für ein j $f_j^* \neq 0 \pmod{(\pi)}$. Weil in $R \cong \hat{S}$ das Element $\pi^{np} \cdot \sum_{j=0}^{p-1} f_j^*(s_1 + \alpha)^j$ eine p -te Potenz ist (nämlich $= s_i^p$), gilt dies auch im ganzen Abschluß $\hat{S}$, also ist in $\hat{S}$ das Element $\sum f_j^*(s_1 + \alpha)^j$ eine p -te Potenz ($\hat{S}$ ist ja Hauptidealring). Da $K \cong \hat{S}/\text{Ra}(\hat{S}) \cong \hat{S}/\text{Ra}(\hat{S})$, folgt: $\sum f_j^*(s_1 + \alpha)^j$ ist $\pmod{\text{Ra}(R)} = (s_1, \pi)$ eine p -te Potenz, d.h. $(\beta_j = \text{konstanter Koeffizient von } f_j^*)$: $\sum_{j=0}^{p-1} \beta_j \alpha^j$ ist p -te Potenz in K . Da $K = k(\alpha)$, $\alpha^p \in k$, folgt:

$\beta_j = 0$ für $j \neq 0$, und β_0 ist die p -te Potenz eines Elements $\gamma \in K$. Wir setzen jetzt $q_{i+1} := q_i - \gamma \pi^n$, i.e. $s_{i+1} = s_i - \gamma \pi^n$. In R gilt dann die Relation

$$\begin{aligned} s_{i+1}^p &= s_i^p - \beta_0 \pi^{np} = \pi^{np} ((f_0^* - \beta_0) + \sum_{j=1}^{p-1} f_j^*(s_1 + \alpha)^j) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} f_j^{(i+1)}(s_1 + \alpha)^j \text{ mit:} \end{aligned}$$

$$f_0^{(i+1)} = \pi^{np} (f_0^* - \beta_0);$$

$$f_j^{(i+1)} = \pi^{np} f_j^* \text{ für } 0 < j < p.$$

Wegen $f_0^* - \beta_0 \equiv f_j^* \equiv 0 \pmod{(\pi)}$ ist tatsächlich $w(\sum_{j=0}^{p-1} f_j^{(i+1)}(s_1 + \alpha)^j) > pn$.

Jetzt wollen wir zeigen, daß die Konstruktion einmal abbrechen muß. Angenommen, dem ist nicht so. Aus der Konstruktion ergibt sich, daß die q_i gegen ein $q \in K[[\pi]]$ konvergieren. Mit $s^* = s_1 + q$ gilt wegen der π -adischen Separiertheit von R dann die Relation

$$(s^*)^p = \lim_i s_i^p = \sum_{j=0}^{p-1} \lim_i f_j^{(i)} \cdot (s_1 + \alpha)^j = 0 !$$

(da $v(f_j^{(i)}) \geq i$).

Nach 2.3.6 ist $\hat{S} \subset \hat{\bar{S}} \cong K[[t]]$, $\hat{S}$ ist also integer. Insbeson-

dere folgt: s^* ist Null in $\hat{S}$, also $s_1 = -q \in K[[\pi]]$, und $\hat{S} = K[[\pi]]$. Dann ist $\hat{S}$ ein diskreter Bewertungsring, also auch S , und dies widerspricht unserer Annahme, daß C nicht glatt ist (siehe p. 62). Dieser Fall kann also nicht eintreten, es gibt also ein N , sodaß bei $i=N$ die Konstruktion abbricht. Durch Verfolgen der Konstruktion sieht man ohne weiteres, daß die Relation $s_N^p = \sum_j f_j^{(N)} (s_1 + \alpha)^j$ sogar äquivalent zur ursprünglichen Relation $s_1^p = \sum_j f_j (s_1 + \alpha)^j$ ist. Also bekommt man, wenn man für s_N wieder s schreibt:

$$\begin{aligned}\hat{S} &\cong K[[\pi]][s] / (s^p - \sum_{j=0}^{p-1} f_j^{(N)} (s_1 + \alpha)^j) \\ &= K[[\pi]][s] / (s^p - \sum_{j=0}^{p-1} f_j^{(N)} (s - q_N + \alpha)^j).\end{aligned}$$

Setze $i := w(\sum_j f_j^{(N)} (s_1 + \alpha)^j) = \min_j (v(f_j^{(N)}))$; eben weil die Konstruktion bei N abbricht, ist $p \nmid i$. Wir haben $f_j^{(N)} = \pi^i \cdot f_j^*$, und wenn β_j der konstante Koeffizient von f_j^* ist, so ist mindestens ein $\beta_j \neq 0$. Für $g_N := \sum_j f_j^* (s - q_N + \alpha)^j$ gilt mod (s, π) : $g_N \equiv \sum_j \beta_j \alpha^j$, und dieser Ausdruck ist (wegen $\beta_j \in k$) eine Einheit von K . Somit ist g_N eine Einheit von $K[[\pi]][s]$. Aus obiger Präsentation ergibt sich, daß $\hat{S}$ s -adisch vollständig ist, wir können also ebensogut schreiben:

$$\begin{aligned}\hat{S} &\cong K[[\pi]][s] / (s^p - \pi^i \cdot g_N) \\ &\cong K[[\pi, s]] / (s^p - \pi^i \cdot u), \quad u := g_N \in K[[\pi, s]]^*.\end{aligned}$$

Diese Präsentation war unser Ziel; mit ihr können wir den Satz beweisen.

$\hat{S}$ ist in $K[[t]]$ ($\cong \hat{S}$) eingebettet derart daß $K[[t]]$ der ganze Abschluß von S ist (wesentlich mehr wissen wir über die Einbettung nicht). Sei wieder v die t -adische Bewertung von $K[[t]]$. Da u auch in S eine Einheit wird, folgt aus der Gleichung $s^p = \pi^i \cdot u$:

$$p \cdot v(s) = i \cdot v(\pi) .$$

(Genaugenommen sind nicht s und π , sondern ihre Restklassen in $\hat{S}$ gemeint.)

Nach Satz 2.3.8 reicht es jetzt zu zeigen: $v(\pi) = p$, $v(s) = i$. (Es wäre ja noch denkbar, daß $v(\pi) = np$, $v(s) = ni$ mit $n > 1$.) $v(s)$ kann nicht 1 sein, denn dann wäre nach 2.3.8 $H(S) = \mathbb{N}$, also $\hat{S} = K[[t]]$ nach 2.3.7, Widerspruch wie auf p. 67.

Seien $\gamma, \delta \in \mathbb{N}$ mit $\gamma p - \delta i = 1$. Setze $z := \pi^\gamma \cdot s^{-\delta} \in \text{quot}(\hat{S}) = K((t))$. Da $z^p = \pi^{\gamma p} s^{-\delta p} = \pi^{\gamma p} (\pi^i u)^{-\delta} = \pi^{\gamma p - \delta i} u^{-\delta} = \pi u^{-\delta} \in \hat{S}$, ist z über $\hat{S}$ ganz, also in $K[[t]]$ gelegen, und keine Einheit, da $\pi \notin K[[t]]^*$. Wir behaupten: $\hat{S} \subset K[[z]] \subset K[[t]]$. Wir wissen bereits $\pi u^{-\delta} \in K[[z]]$; andererseits ist $z^i = \pi^{\gamma i} s^{-\delta i} = s^{\gamma p u - \delta s - \delta i} = s u^{-\gamma}$. Weil u eine Einheit ist, gilt $K[[\pi, s]] = K[[\pi u^{-\delta}, s u^{-\gamma}]]$; da S epimorphes Bild von $K[[\pi, s]]$ ist, folgt die Behauptung. Also ist $\hat{S} \subset K[[z]]$, und der letztere Ring ist ein Potenzreihenring in einer Variablen, also normal. Da $K[[t]]$ die Normalisierung von $\hat{S}$ ist, folgt $K[[z]] = K[[t]]$, was nur für $v(z) = 1$ möglich ist. Es folgt $1 = v(z) = v(\pi^\gamma) \cdot v(s^{-\delta}) = \gamma \cdot v(\pi) - \delta \cdot v(s)$, d.h. $(v(\pi), v(s)) = 1$, und dies liefert zusammen mit obiger Gleichung: $v(\pi) = p$, $v(s) = i$. Da oben schon bemerkt wurde, daß $v(s) \neq 1$, ist der Satz vollständig bewiesen.

(2.3.11) FOLGERUNG. Sei X eine Form von $\mathbb{A}^1$ mit nicht-glattem Modell C . Dann hat $p_a(X)$ folgende Form:

$$p_a(X) = (i-1) \cdot \frac{p-1}{2}, \quad 2 \leq i \notin p\mathbb{Z}.$$

N.B. Auch für $p=2$ ist dieser Ausdruck ganz.

(Ob alle i auftreten können, wird noch diskutiert werden. Etwa für $p=5$ sind im Moment also folgende Werte theoretisch möglich: $p_a = 2, 4, 6, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 24, 26, 30, \dots$)

BEWEIS: Sei i wie in 2.3.10, und H das von p und i erzeugte Untermonoid von $\mathbb{N}$. Nach 2.3.4 gilt: $p_a(X) =$

$$= \dim_K(\bar{S}/S) \stackrel{(2.3.6)}{=} \dim_K(\hat{\bar{S}}/\hat{S}) \stackrel{(2.3.7)}{=} \text{card}(\mathbb{N} - H(\hat{S})) =$$

$$\stackrel{(2.3.10)}{=} \text{card}(\mathbb{N} - H). \text{ Nach [An] p.270 ist } H \text{ symmetrisch}$$

(Definition siehe dort), nach loc.cit. I.1.3.(4) ist also $\text{card}(\mathbb{N} - H) = \frac{f}{2}$, wobei $f = \min\{n! \mid [n, \infty] \subset H\}$. f heißt der Konduktor von H . Die sogenannte Apéry-Folge von H zu p ist die Folge $a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1}$, wobei $\{a_0, \dots, a_{p-1}\}$ die Menge der Minima von $H \cap C_j$ ist (C_j durchläuft alle Restklassen $j + p\mathbb{Z}$). Offenbar ist $\{a_0, \dots, a_{p-1}\} = \{0, i, \dots, (p-1)i\}$, d.h. $a_{p-1} = (p-1)i$. Nach [An] I.1.2 ist $f = a_{p-1} - p + 1 = (p-1)i - (p-1) = (p-1)(i-1)$, für $\frac{f}{2}$ ergibt sich also die behauptete Formel. (Man kann $\text{card}(\mathbb{N} - (p, i)) = \frac{1}{2}(p-1)(i-1)$ auch direkt beweisen.) q.e.d.

(2.3.12) BEMERKUNGEN. Im Rest dieses Abschnitts wollen wir zeigen, daß Satz 2.3.10 mit seiner Folgerung scharf ist: Genau dann gibt es verzerrte Formen X von $\mathbb{A}^1$ (unter $K|k$) mit arithmetischem Genus n , wenn entweder $n = 0$ ist oder $n = (i-1)\frac{p-1}{2}$ für ein $i \in p\mathbb{Z}$, $i \geq 2$ ist. Für $p=2$ kann also $p_a(X)$ jeden positiven (ganzzahligen) Wert annehmen.

Wir vergleichen dieses Resultat mit Ergebnissen von KAM-BAYASHI, MIYANISHI und TAKEUCHI: In [Ka-M-Ta] wird ein Satz (6.8.3) bewiesen, aus dem man folgern kann: Genau dann kann eine Form X von $\mathbb{A}^1$ arithmetisches Genus 1 haben, wenn $p = 2$ oder $p = 3$ ist. Es werden in loc.cit. für diesen Fall genauere Strukturaussagen gemacht. Dieses Resultat deckt sich mit unserer Formel.

Bemerken wir noch: Nach 2.2.6 ist für $p \neq 2$ X genau dann rational (d.h. birational zu $\mathbb{A}^1$), wenn C glatt ist. Ferner ist für beliebiges p $p_a(X) = 0$ genau dann, wenn C glatt ist (wie vor 2.3.5 bemerkt). Die rationalen Formen lassen sich genau klassifizieren ([Ka-M-Ta] 6.8.1). N.B. Wir haben die Formen mit $p_a = 0$ im Falle $p = 2$ klassifiziert, dies sind also mehr als die rationalen (2.2.10),

Unser Ziel ist jetzt, in gegebener Charakteristik p und für jedes i mit $p \nmid i$, $i \geq 2$, eine Form $X = X_{p,i}$ von $\mathbb{A}^1$ zu konstruieren mit $p_a(X_{p,i}) = (i-1)\frac{p-1}{2}$. Dies geht nicht direkt, sondern nach folgendem Programm:

(a) Wir betrachten eine affine singularitätenfreie Kurve $0 \in \text{Spec}(A) \subset \mathbb{A}_K^2$, so daß $K \otimes \text{Spec}(A)$ nur eine Singularität im Nullpunkt hat und zu $\mathbb{A}_K^1$ birational ist. (Der lokale Ring der Singularität soll eine geeignete Lokalisierung von $K[T^p, T^i]$ werden. Ferner soll in der Normalisierung von $K \in \text{Spec}(A)$ nur ein Punkt über 0 liegen, und dieser Punkt soll K -rational sein.

(b) Danach zeigen wir, daß man $\text{Spec}(A)$ in eine vollständige Kurve C einbetten kann, deren einzige nicht glatte Stelle der Nullpunkt ($\in \text{Spec}(A)$) ist. Es ergibt sich: $C - \text{Spec}(A)$ ist nur ein Punkt " ∞ "; das Wesentliche ist die Glattheit von C in ∞ . Dies ist der komplizierteste Teil.

(c) Man zeigt: $X := C - \{0\}$ (sic!) ist eine Form von $\mathbb{A}^1$ mit dem gewünschten Genus.

Die Genusberechnung ist mit unseren Methoden nicht mehr schwer. Wir können sofort beweisen, daß $K \otimes X \cong \mathbb{A}_K^1$: C ist das Modell von X , denn 0 ist zwar nicht glatt, aber regulär. Der einzige singuläre Punkt von $K \otimes X$ ist der Nullpunkt 0_K von $K \otimes \text{Spec}(A)$. Wenn $\tilde{C}$ die Normalisierung von $K \otimes C$ ist, so hat $\tilde{C}$ nach Konstruktion genau einen (K -rationalen!) Punkt über 0_K . $\tilde{C} \cong \mathbb{P}_K^1$, da $K \otimes \text{Spec}(A)$ zu $\mathbb{A}_K^1$ birational ist. Deshalb ist $K \otimes X \cong K \otimes C - 0_K \cong \mathbb{P}_K^1 - \{K\text{-rationaler Punkt}\}$; es ist aber wohlbekannt (und leicht zu sehen), daß man durch Entfernen eines K -rationalen Punktes aus $\mathbb{P}_K^1$ stets $\mathbb{A}_K^1$ (bis auf Isomorphie) erhält. q.e.d.

Zu Teil a): Wir setzen $A := k[\pi, t]/(t^p - a - \pi^i)$. (π, t sind hier Variablen. Wir erinnern daran, daß $\alpha = a^{1/p} \in K - k$.)

(2.3.13) LEMMA. A ist normal und integer (i.e. Dedekind), und $K \otimes A$ ist zu $K^{[1]}$ birational. Wenn S_0 den lokalen Ring von $K \otimes A$ im Nullpunkt und $\overline{S_0}$ seine Normalisierung bezeichnet, so gilt: $\dim_K(\overline{S_0}/S_0) = (i-1)(p-1)/2$.

BEWEIS: $K \otimes A \cong K[\pi, t]/(t^p - a - \pi^i) \cong K[\pi, t_1]/(t_1^p - \pi^i)$ (hierbei geht t auf $t_1 + \alpha$). Man sieht leicht, daß letzterer Ring via $t_1 \mapsto T^i, \pi \mapsto T^p$ zu $K[T^p, T^i]$ isomorph ist. Da $(p, i) = 1$, ist $T \in \text{Quot } K[T^p, T^i]$, d.h. die Normalisierung von $K[T^p, T^i]$ ist $K[T]$, und eine Potenz von T liegt im Konduktor. Für $\underline{m} \in \text{Max } K[T^p, T^i]$, $T \notin \underline{m}$, ist also $K[T^p, T^i]_{\underline{m}}$ schon normal (sogar glatt), und $\underline{m}_0 := (T^p, T^i)$ ist das einzige maximale Ideal im nichtnormalen Locus. Nach 2.2.5 ist also A glatt in allen Punkten bis auf den Punkt $\underline{n}_0 = \underline{m}_0 \cap A$ unter $\underline{m}_0$. Wir zeigen: Auch dort ist A regulär, d.h. $A_{\underline{n}_0}$ ist ein diskreter Bewertungsring. Das Ideal $\pi A \subset A$ ist maximal, denn $A/\pi A \cong k[t]/(t^p - a) \cong K$. Durch Zurückverfolgen der Isomorphismen sieht man $\pi A \subset \underline{n}_0$, d.h. $\underline{n}_0$ ist selbst zyklisch, q.e.d.

Daß $K \otimes A$ zu A^1 birational ist, folgt sofort daraus, daß die Normalisierung von $K \otimes A$ zu $K[T]$ isomorph ist. Es ist $S_0 \cong K[T^p, T^i]_{\underline{m}_0}$, $\overline{S_0} \cong K[T]_{(T)}$, und $\overline{S_0}/S_0 \cong K[T]_{(T)}/K[T^p, T^i]_{\underline{m}_0} \cong (K[T]/K[T^p, T^i])_{\underline{m}_0} \cong K[[T]]/K[[T^p, T^i]]$, und die K -Dimension des letzten Ausdrucks kann man mit Hilfe der Wertehalbgruppe bestimmen: $H = H(K[[T^p, T^i]]) = (p, i)$, und nach 2.3.11 ist $\text{card}(\mathbb{N} - H) = (i-1)(p-1)/2$.

Jetzt beginnen wir mit Teil (b).

(2.3.14) LEMMA. $\text{Spec}(A)$ liegt in $A^2 = \text{Spec}(k[\pi, t])$, und der Abschluß von $\text{Spec}(A)$ in $\mathbb{P}^2 \supset A^2$ ist

$$Y = V(t^p - a \cdot s^p - \pi^i s^{p-i}) \quad \text{für } i < p;$$

$$Y = V(t^p \cdot s^{i-p} - a \cdot s^i - \pi^i) \quad \text{für } i > p.$$

Hierbei sind π, t, s homogene Koordinaten von $\mathbb{P}^2$ mit $A^2 = D(s) \subset \mathbb{P}^2$.

BEWEIS: Nach [Ht] Ex. I 2.9 bekommt man das homogene Ideal von $Y = \overline{\text{Spec}(A)}$ dadurch, daß man das Ideal $(t^p - a - \pi^i)$ homogenisiert, d.h. zu jedem Monom eine Potenz von s hinzumultipliziert derart daß das ganze Polynom homogen von kleinstmöglichem Grad wird (in unserem Fall $\max(i, p)$). Daraus folgt bereits die Behauptung.

Worauf es jetzt ankommt, ist, die Singularitäten von Y zu beseitigen. Als singuläre Punkte kommen ohnehin nur Punkte aus $(\mathbb{P}^2 - \mathbb{A}^2) \cap Y$ in Frage, sogenannte unendlich ferne Punkte. $\mathbb{P}^2 - \mathbb{A}^2$ wird durch $s=0$ definiert. Für $i < p$ sieht man also: Der einzige unendlich ferne Punkt auf Y ist der Punkt $s=0$, $t=0$, d.h. $(\pi:t:s) = (1:0:0)$. In einer Umgebung von $(1:0:0)$, nämlich $D(\pi) = \text{Spec}(k[\frac{t}{\pi}, \frac{s}{\pi}])$, wird Y durch die Gleichung $(\frac{t}{\pi})^p - a \cdot (\frac{s}{\pi})^p - (\frac{s}{\pi})^{p-i}$ definiert; der Punkt $(\frac{t}{\pi} = \frac{s}{\pi} = 0)$ ist also offenbar für $p-i > 1$ singulär. Analog sieht man für $i > p$: Der einzige unendlich ferne Punkt auf Y ist $(\pi:t:s) = (0:1:0)$, und in der affinen Umgebung $D(t)$ wird Y durch $(\frac{s}{t})^{i-p} - a \cdot (\frac{s}{t})^i - (\frac{s}{t})^i$ beschrieben. Auch hier hat man meistens ($i-p > 1$) eine Singularität auf Y , aber, wie auch im ersten Fall, höchstens eine. Dieser singuläre Punkt (nennen wir ihn p_ω) soll jetzt beseitigt werden, und zwar durch Aufblasen der umgebenden Varietät $\mathbb{P}^2$. Von dieser sehr allgemeinen Technik benötigen wir nur einige Rudimente (vergleiche die einschlägigen Lehrbücher), die wir in Kürze bereitstellen wollen:

Sei $0 \in U \subset \mathbb{A}_k^2$ zariski-offen und affin mit Koordinatenring C , x und y Parameter bei Null (d.h. $\underline{m}_0$, das Ideal des Nullpunkts, ist von x und y erzeugbar). Dann ist die Aufblasung (Blow-up) von U im Nullpunkt erklärt als das U -Schema

$$B_0(U) := \underline{\text{Proj}}_U(C[t, u]/(ty - ux)).$$

(Vgl. [Ht] Def. auf p. 163; Prop. V 3.6).

Das formale Instrument $\underline{\text{Proj}}$ kann man elementar umgehen: Man hat zwei affine Schemata B_1, B_2 über U , nämlich $B_1 =$

$\text{Spec}((A[u]/(y-ux)))$ und $B_2 = \text{Spec}(A[t]/(ty-x))$. $D(u) \subset B_1$ und $D(t) \subset B_2$ sind über U kanonisch isomorph (via $t \mapsto u^{-1}$). Dann ist $B_0(U)$ dasjenige Schema über U , welches sich aus B_1, B_2 durch Verkleben von $D(u)$ mit $D(t)$ ergibt. Man hat eine kanonische Projektion $p: B_0(U) \rightarrow U$. Nach [Ht] II 7.13 (oder durch Nachrechnen) sieht man:

$$p: p^{-1}(U - \{o\}) \longrightarrow U - \{o\} \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Ferner gilt (was wir nicht brauchen): $p^{-1}(o) \cong \mathbb{P}_k^1$.

Uns interessiert insbesondere folgendes: Sei $Z \subset U$ eine Kurve durch den Nullpunkt. Dann definiert man die strikte Transformierte $\tilde{Z}$ von Z in $B_0(U)$ als Abschluß von $p^{-1}(Z - \{o\})$ in $B_0(U)$. $\tilde{Z} - p^{-1}(o) \cap \tilde{Z}$ ist via p wieder isomorph zu $Z - \{o\}$.

Sei jetzt $\mathbb{A}^2 = \text{Spec}(k[x,y])$, $U \subset \mathbb{A}^2$, $o \in U$. Z ist dann notwendigerweise durch eine Gleichung $f(x,y) = 0$ gegeben, $f(x,y) \in (x,y)k[x,y]$. Dann kann man definierende Gleichungen für $\tilde{Z}$ wie folgt finden ([Ht], Prop. V 3.6 und ihr Beweis):

$$\tilde{Z} = Z_1 \cup Z_2, \quad Z_1 = Z \cap B_1, \quad B_1 = \text{Spec}(k[x,u]), \quad B_2 = \text{Spec}(k[t,y]),$$

Z_1 wird definiert von $g_1(x,u)$, wobei $x^r \cdot g(x,u) = f(x,ux)$ und $x \nmid g(x,u)$, d.h. also r ist die Ordnung von $f(x,y)$;

Z_2 wird definiert von $g_2(t,y)$, wobei wieder gilt $y^r \cdot g_2(t,y) = f(ty,y)$, $y \nmid g_2(t,y)$.

Um die beiden Fälle $p \leq i$ simultan behandeln zu können, beweisen wir folgendes allgemeinere Lemma:

(2.3.15) LEMMA. Sei U offen in $\mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x,y])$, Z eine Kurve durch den Nullpunkt in U , welche durch $f = c \cdot x^\beta + b \cdot x^\beta y^\gamma + y^\delta$ definiert wird, wobei $\beta + \gamma \geq \eta > \delta > 0, c \neq 0$. Sei $\tilde{Z}$ die aufgeblasene Kurve, d.h. die strikte Transformierte von Z in $B_0(U)$. Dann hat $\tilde{Z}$ nur einen Punkt p_o über $o \in Z$ (und zwar $p_o \in Z_1$), und in geeigneten Koordinaten $\tilde{x}, \tilde{y}$ um p_o , wird Z_1 definiert durch

$$\tilde{c} \cdot \tilde{x}^{\tilde{\eta}} + \tilde{b} \cdot \tilde{x}^{\tilde{\beta}} \tilde{y}^{\tilde{\gamma}} + \tilde{y}^{\tilde{\delta}},$$

mit $\tilde{\eta} = \max(\delta, \eta - \delta)$, $\tilde{\delta} = \min(\delta, \eta - \delta)$, und $\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} \geq \tilde{\eta} \geq \tilde{\delta} > 0, \tilde{c} \neq 0$.

(Man hat also eine Gleichung "vom selben Typ" wie für Z selbst, nur kann u.U. die Schärfe der Relation $\eta > \delta$ verlorengehen.)

BEWEIS: Wir verwenden die obigen Notationen. Behauptung: Der einzige Punkt von $\tilde{Z}$ über o ist der Nullpunkt von B_1 . Denn Z_2 ist definiert durch $c \cdot t^{\eta} y^{\eta - \delta} + b \cdot t^{\beta} y^{\gamma + \beta - \delta} + 1$ ($= y^{-\delta} \cdot f(ty, y)$), in Z_2 liegen also keine Punkte mit $y = 0$, d.h. kein Punkt über dem Nullpunkt von U , der ja durch $x = y = 0$ definiert ist.

Z_1 hingegen wird definiert durch $c \cdot x^{\eta - \delta} + b \cdot x^{\beta + \gamma - \delta} u^{\gamma} + u^{\delta}$; es gibt also genau einen Punkt in Z_1 mit $x = 0$, nämlich den Punkt p_o mit $x = u = 0$, und dies ist der Ursprung in B_1 .

Falls $\eta - \delta \geq \delta$, schreiben wir $\tilde{y} := u$, $\tilde{x} := x$ und setzen $\tilde{\eta} = \eta - \delta$, $\tilde{\delta} = \delta$, $\tilde{\beta} = \beta + \gamma - \delta$, $\tilde{\gamma} = \gamma$, und man erhält die behauptete Gleichung für Z_1 ($\tilde{c} = c$, $\tilde{b} = b$), sodaß auch die behaupteten Relationen zwischen den Exponenten stimmen. Falls $\eta - \delta < \delta$, schreiben wir $\tilde{x} := u$, $\tilde{y} := x$ und setzen $\tilde{c} = c^{-1}$, $\tilde{b} = bc^{-1}$, $\tilde{\eta} = \delta$, $\tilde{\delta} = \eta - \delta$, $\tilde{\beta} = \gamma$, $\tilde{\gamma} = \beta + \gamma - \delta$. Wieder stimmt alles wie behauptet ($\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} - \tilde{\eta} = \beta + 2\gamma - \delta - (\eta - \delta) = \beta + 2\gamma - \delta \geq \beta + \gamma - \delta \geq 0$).

Damit können wir jetzt das technische Hauptlemma beweisen:

(2.3.16) SATZ. Sei Y wie in 2.3.14, p_{∞} der singuläre unendlich ferne Punkt von Y . Dann existiert eine vollständige Kurve C mit einem glatten Punkt q_{∞} so daß $C - \{q_{\infty}\} = Y - \{p_{\infty}\}$ ist. (C ist dann nach Definition das Modell von Y , also die Normalisierung von Y , da Y bereits vollständig ist. Der Satz besagt also: Die Normalisierung von Y ist nicht nur regulär, sondern sogar glatt.)

BEWEIS: Vorbemerkung: Wir haben das Aufblasen eines Punktes nur für den Nullpunkt in $U \subset \mathbb{A}^2$ erklärt. Allgemein kann

man jeden k -rationalen Punkt auf einer glatten Fläche F aufblasen. Uns genügt der Fall, daß $p \in F$ eine zu $U \subset \mathbb{A}^2$ isomorphe Umgebung hat, wobei p dem Ursprung entspricht. $B_p(F)$, die Aufblasung von F in p , wird dann so definiert, daß man $B_0(U)$ bildet und längs $U - \{0\}$ (welches ja offen in $F - \{p\}$ eingebettet ist) in $F - \{p\}$ einklebt. Dieser Prozeß liefert bis auf kanonische Isomorphie unabhängig von der Auswahl von U stets dasselbe Ergebnis (z.B. kann man U jederzeit verkleinern). Entsprechend ist auch die strikte Transformierte einer Kurve durch p erklärt, nämlich durch Zurückführung auf $Z \subset U \subset \mathbb{A}^2$. Der Aufblasungsprozeß hat völlig lokalen Charakter. All dies ist bekannt und wird hier nur ausgeführt, weil in den Lehrbüchern i.a. $k = \bar{k}$ vorausgesetzt wird.

$Y \subset \mathbb{P}_k^2$ hat, wie wir wissen, nur den einzigen singulären Punkt $p_\infty = (1:0:0)$ oder $(0:1:0)$ (je nachdem, ob $i < p$ oder $p < i$); die anderen Punkte sind glatt. Wir werden p_∞ in $\mathbb{P}^2$ aufblasen und die strikte Transformierte $\tilde{Y} \subset B_{p_\infty}(\mathbb{P}^2)$ betrachten. Es zeigt sich, daß nur ein Punkt $\tilde{p}_\infty$ über p_∞ liegt. Derart bläst man immer weiter auf und erhält schließlich $Y^{(n)} = Y^{(n-1)}$, solange $p_\infty^{(n-1)}$ noch nicht regulär ist. All dies muß mit Hilfe von 2.3.15 explizit durchgerechnet werden. Jetzt schon können wir bemerken: Da Aufblasungen projektiver Schemata wieder projektiv sind und die $Y^{(n)}$ abgeschlossen im n -mal aufgeblasenen $\mathbb{P}^2$ liegen, sind die $Y^{(n)}$ allesamt vollständige Kurven. Sowie der einzige(!) Punkt $p_\infty^{(n)}$ über p_∞ von $Y^{(n)}$ glatt ist, ist ganz $Y^{(n)}$ glatt, wir können also $C := Y^{(n)}$ setzen und haben das glatte Modell gefunden. Nun zur Rechnung.

Wie schon gezeigt, wird $Y = Y^{(0)}$ in einer Umgebung von p_∞ definiert von der Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{x}\right)^p - a \cdot \left(\frac{s}{x}\right)^p - \left(\frac{s}{x}\right)^{p-i} &= x^p - ay^p - y^{p-i} \quad (i < p); \\ \left(\frac{s}{t}\right)^{i-p} - a \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^i - \left(\frac{x}{t}\right)^i &= y^{i-p} - ay^i - x^i \quad (p < i), \end{aligned}$$

mit evidenten Setzungen $x = \frac{t}{\pi}$, $y = \frac{s}{\pi}$ bzw. $x = \frac{\tau}{t}$, $y = \frac{s}{t}$.
 p_{∞} hat dabei die Koordinaten $x=y=0$ (!!).

Die Gleichungen sind schon so präpariert, daß man 2.3.15 verwenden kann: In beiden Fällen hat ja die Gleichung die Gestalt

$$(*) \quad c \cdot x^{\eta} + b \cdot x^{\beta} y^{\gamma} + y^{\delta} \quad \text{mit} \quad \beta + \gamma \geq \eta > \delta > 0,$$

und es ist die sehr wichtige Zusatzbedingung $ggT(\eta, \delta) = 1$ erfüllt.

Es zeigt sich, daß man beim Aufblasen und Übergehen zur strikten Transformierten immer wieder eine Gleichung vom Typ (*) bekommt - in der Tat ist dies praktisch die Aussage von 2.3.15, und von dorthier wissen wir auch, daß $Y^{(n)}$ immer nur einen unendlich fernen Punkt $p_{\infty}^{(n)}$ hat. Allerdings müssen wir uns überzeugen, daß die Zusatzbedingung $ggT(\eta, \delta) = 1$ für $\tilde{\eta}, \tilde{\delta}$ wieder gilt. Wenn aber η und δ teilerfremd sind, so sind es auch η und $\eta - \delta$, also auch $\tilde{\eta} = \max(\eta, \eta - \delta)$ und $\tilde{\delta} = \min(\eta, \eta - \delta)$. Insbesondere bleibt die Ungleichung $\tilde{\eta} > \tilde{\delta}$ scharf, wenn nicht schon $\tilde{\delta} = 1$. Deshalb kann man die Konstruktion von 2.3.15 solange iterieren, wie $\delta > 1$ bleibt. (Es ist natürlich $\tilde{\delta}, \tilde{\delta}, \dots$ gemeint.) Dies muß abbrechen, weil etwa die Größe $\delta + \eta$ bei jedem Schritt fällt. Zum Schluß erhält man also ein $Y^{(n)}$, welches bei $p_{\infty}^{(n)}$ durch eine Gleichung

$$(**) \quad f(x, y) = c_n \cdot x^{\eta_n} + b_n \cdot x^{\beta_n} y^{\gamma_n} + y^{\delta_n} = 0$$

definiert wird ($\delta_n = 1$!) Es ist $1 \leq \eta_n \leq \beta_n + \gamma_n$.

Wir behaupten: Die durch (**) definierte Kurve ist im Nullpunkt glatt. Hierzu dürfen wir nach 2.2.2 zu $\bar{K}$ übergehen. Sei $S = \bar{K}[x, y]_{(x, y)}$; zu zeigen ist, daß $S/(f)$ glatt ist. Da $\bar{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, ist dies gleichbedeutend mit der Regularität von $S/(f)$. $S/(f)$ ist aber ein regulärer lokaler Ring, da $f \in (x, y) - (x, y)^2$.

Wir setzen $C := Y^{(n)}$. Teil (b) ist hiermit erledigt, wie vorher schon Teil (a).

Wie angekündigt, setzen wir $X := C - \{o\}$. (o ist der Nullpunkt von $\text{Spec}(A) \subset C$.) In c) haben wir schon bewiesen, daß X eine Form von $\mathbb{A}^1$ ist, und wir wissen: C ist das Modell von X . Vorsicht: Der Punkt $C - X$ heißt jetzt o (früher ∞ .) Nach Satz 2.3.4 ist $p_a(X) = \dim(\bar{S}/S)$, wobei $S' = K \otimes_{C,o} S$ ($\bar{}$ bedeutet Normalisierung). Nach 2.3.3 ist $S' = K \otimes_{\text{Spec} A, o} S_o$, und nach loc.cit. folgt $\dim(\bar{S}/S) = (i-1)(p-1)/2$. Damit ist auch (c) bewiesen.

Zusammenfassend können wir sagen:

(2.3.17) HAUPTSATZ. Genau dann gibt es Formen X von $\mathbb{A}^1$ bezüglich $K|k$ mit dem arithmetischen Genus n , wenn

$$n = (i-1) \frac{p-1}{2} \text{ für ein } i \in \mathbb{N} - p\mathbb{N}.$$

(Bisher war immer $i > 1$; $i = 1$ liefert die Formen mit $p_a = 0$, die wir bis jetzt immer ausgeschlossen hatten.)

Es ist nicht klar, wie dieser Satz sich auf rein inseparable Körpererweiterungen K vom Grad p^m verallgemeinern läßt.

(2.3.18) BEMERKUNGEN. Die Arbeiten [Tt] und [St] von TATE und STICHTENOTH befassen sich mit dem Genuswechsel algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen bei rein inseparablen Grundkörpererweiterungen $K|k$, $[K:k] = p$. Es besteht ein Zusammenhang zu unseren Ergebnissen:

Zu jeder Kurve $X|k$ gehört ein algebraischer Funktionenkörper L in 1 Variablen, der Körper der rationalen Funktionen auf X . Umgekehrt bekommt man aus L zwar nicht X zurück, aber doch die Isomorphieklasse des Modells C von X . (Jeder Funktionenkörper L in 1 Variablen kommt von einer eindeutig bestimmten vollständigen regulären Kurve C .) Das Genus von L ist nach [Deu] p. 40 die Dimension des Raums der k -Differentialle von L , und dieser Raum hat nach [Al-Kl] VIII 1.9 dieselbe Dimension wie $H^1(C, \mathcal{O}_C)$. (Loc.cit. 1.8 ist anwendbar, denn C ist vollständig und normal, also S_1 .) Demnach ist das übliche Genus von L tatsächlich dasselbe wie das arithmetische Genus von C .

Tate beweist: Falls $K \otimes_k L \cong K(T)$ (es reicht schon, daß $g(K \otimes L) = 0$), dann ist das Genus $g(L)$ durch $(p-1)/2$ teilbar. Daraus läßt sich ein Teil unseres Satzes 2.3.11 folgern. Denn wenn X eine Form von $\mathbb{A}^1$ ist, so ist $L := k(X)$ solch ein Funktionenkörper, man bekommt also $(\frac{p-1}{2}) | p_a(X)$, weil ja $p_a(X) = p_a(C) = g(L)$. Umgekehrt folgt mit demselben Argument aus 2.3.17 ein KOROLLAR zu Tates Arbeit: jedes Vielfache $j \cdot \frac{p-1}{2}$, $j+1 \notin p\mathbb{N}$, tritt als Genussprung bei einer Erweiterung $K|k$ auf. ($p \neq 2$)

Stichtenoth klassifiziert unter anderem diejenigen Funktionenkörper L über k mit $g(L) = \frac{p-1}{2}$ und $g(K \otimes L) = 0$. (Nach Tate ist $\frac{p-1}{2}$ ja der kleinstmögliche positive Wert.) Wahrscheinlich kann man hieraus auch Aussagen über gewisse Formen von $\mathbb{A}^1$ gewinnen, aber sicher nicht über alle. Global betrachtet, stellen die Formen X mit $p_a(X) = \frac{p-1}{2}$ ($p \neq 2$) nur einen geringen Bruchteil dar, siehe 2.3.17!

(2.4) Zusammenhang zwischen Grad und Genus einer Form von $\mathbb{A}^1$

Nach dem Abschnitt 2.1, insbesondere 2.1.15, haben wir zumindest theoretisch die Möglichkeit, die verzerrten Formen X von $\mathbb{A}^1$ bezüglich $K|k$ (wie oben) zu berechnen. Man hat alle K -Derivationen $D: K[T] \rightarrow K[T]$ zu betrachten mit $D[p] = 0$ ($D = F \cdot \partial_T$, und $D[p] = 0 \iff F[p] = 0$), und man erhält alle Formen X in der Gestalt $\text{Spec}(A)$ mit $A = \text{Ke}(D + \partial)$. (Zur Erinnerung: $\partial(T) = T$, $\partial(\alpha) = 1$.) Der Grad von X wurde definiert als Grad von F , sofern dieser > 1 war, und ist eine Invariante von X . Wir wollen hier versuchen, eine Beziehung zwischen dem Grad und der "klassischen" Invariante $p_a(X)$ herzustellen. Ferner wollen wir für möglichst viele X eine explizite Präsentation von A durch Erzeugende und Relationen finden, und diejenigen F charakterisieren, für die X die Struktur einer algebraischen Gruppe trägt.

Die Berechnung von $p_a(X)$ aus der Gestalt von F gelingt leider nicht in voller Allgemeinheit, sondern nur unter der Zusatzvoraussetzung $F \in K[T^P]$. Nach 2.1.16 wäre es im wesentlichen dasselbe zu fordern: $F \in K \cdot T + K[T^P]$. Es stellt sich aber heraus, daß unsere Zusatzvoraussetzung eine sehr sinnvolle geometrische Interpretation hat. Hierzu definieren wir:

DEFINITION. Sei X ein k -Schema. Dann heißt X parallelisierbar, wenn Ω_X über $\mathcal{O}_X$ frei ist. (N.B. Wenn X glatt ist, dann ist Ω_X immerhin lokal frei über $\mathcal{O}_X$!)

BEISPIEL. $X = \mathbb{A}^1 = \text{Spec}(k[T])$; hier ist $\Omega_X = \mathcal{O}_X \cdot dT = k[T] \cdot dT$.

(2.4.1) SATZ. Sei X eine Form von $\mathbb{A}^1$, welche wie oben durch $F \in K[T]$ definiert wird. Dann sind äquivalent:

- a) X ist parallelisierbar
- b) $F \in K \cdot T + K[T^P]$.

BEWEIS: Sei $X = \text{Spec}(A)$, $\beta: K \otimes A \xrightarrow{\cong} K[T] = K \otimes k[T]$. Nach der allgemeinen Abstiegstheorie (vgl. 2.1) wird dann die Form A durch den Kozyklus $\varphi = \eta_1(\beta) \cdot \eta_0(\beta)^{-1}$ definiert, $\varphi \in \text{Aut}(K \otimes K[T])$. Es ist $\varphi = [\exp](tG)$ mit $G \sim F$, und offenbar gilt nach 2.1.8: $F \in KT + K[T^P] \iff G \in KT + K[T^P]$. Wir können also $F = G$ annehmen. Jetzt behaupten wir: Sei A durch $\varphi \in \text{Aut}(K \otimes K[T])$ definiert, $\varphi(T) = \Phi$. Dann ist Ω_A genau dann A -frei (d.h. $\text{Spec}(A)$ parallelisierbar), wenn $\Phi' = \frac{\partial}{\partial T} \Phi$ die Form hat $\eta_1(u) \cdot \eta_0(u^{-1})$, $u \in K^*$.

Wir betrachten die Abbildung $f = g \cdot d\beta: K \otimes \Omega_{A|k} \cong \Omega_{K \otimes A|K} \longrightarrow \Omega_{K[T]|K} = K[T] \cdot dT \xrightarrow{g} K \otimes A$, wobei gelte $g(x \cdot dT) = \beta^{-1}(x)$. Weil f $K \otimes A$ -linear ist, ist $\Omega_{A|k}$ verzerrte

Form des Moduls A bezüglich der treuflachen Erweiterung $K \otimes A|A$, und diese verzerrte Form ist trivial genau dann, wenn $h := \eta_1(f) \cdot \eta_0(f)^{-1}$ ein Korand ist. Es gilt nun: $h =$

$$\begin{aligned} \eta_1(g) \cdot \eta_1(d\beta) \cdot \eta_0(d\beta)^{-1} \cdot \eta_0(g)^{-1} &= \eta_1(g) \cdot d(\eta_1(\beta)) \cdot d(\eta_0(\beta)^{-1}) \cdot \eta_0(g^{-1}) \\ &= \eta_1(g) \cdot d(\varphi) \cdot \eta_0(g)^{-1}: K \otimes K \otimes A \longrightarrow K \otimes K \otimes A. \quad h \text{ ist Multipli-} \end{aligned}$$

kation mit einer Einheit (nämlich $h(1)$), und es gilt
 $h(1) = \eta_1(g) d(\varphi)(dT) = \underset{\text{Def.}}{\eta_1(g)(\vartheta' \cdot dT)} = \eta_1(\beta^{-1})(\vartheta')$. Da in
 $K \otimes A \cong K[T]$ alle Einheiten schon in K^* liegen, ist $\eta_1(\beta)^{-1}(\vartheta')$
höchstens dann ein Korand, wenn es in $K \otimes K \subset K \otimes K \otimes A$ liegt.
Also ist $\eta_1(\beta)^{-1}(\vartheta') = \vartheta' \in K \otimes K$, und ϑ' ist Korand genau
dann, wenn $\vartheta' = \eta_1(u) \cdot \eta_0(u^{-1})$ für ein $u \in K^*$.

Sei nun X parallelisierbar. In unserer Situation ist ϑ
 $= \varphi(T) = \sum (t^i/i!) (F \frac{\partial}{\partial T})^{[i]}(T) = T + t \cdot F + \text{Terme in } t^2$.
Aus $\vartheta' = \text{const.}$ folgt $F' = \text{const.}$, und dies ist äquivalent
zu $F \in KT + K[T^P]$.

Sei nun umgekehrt $F \in KT + K[T^P]$. Nach 2.1.16 dürfen wir
sogar annehmen, daß $F \in K[T^P]$. Wie immer setzen wir $D = F \frac{\partial}{\partial T}$.
Durch Induktion sieht man sofort, daß $D^{[i]}(T) \in K[T^P]$, d.h.
 $\vartheta = \sum (t^i/i!) D^{[i]}(T) \in (K \otimes K)[T^P]$, d.h. $\vartheta' = 1$, und nach
dem Obigen ist A parallelisierbar. q.e.d.

In dieses Bild kann man bequem diejenigen X einordnen, die
eine Gruppenstruktur tragen. Seien die Bezeichnungen wie in
2.4.1.

(2.4.2) SATZ. Es sind äquivalent:

- a) X trägt die Struktur einer algebraischen Gruppe
- b) F ist kohomolog zu einem sogenannten p -Polynom,
also zu einem Polynom der Form $a_0 T + a_1 T^p + a_2 T^{p^2} + \dots$
- c) Wie in b), aber zusätzlich $a_0 = 0$.

BEWEIS: a) $\Rightarrow$ b): Auch $K \otimes X \subseteq \mathbb{A}_K^1$ trägt dann eine algebra-
ische Gruppenstruktur. Nach [R]₁ p.528 sind dann $K \otimes X$ und
 $G_{a,K}$ als Gruppen isomorph, d.h. es existiert ein Isomorphis-
mus von Hopfalgebren $\beta: K \otimes A \rightarrow K[T]$. (Hierbei ist $X = \text{Spec}(A)$,
 $\Delta T = T \otimes 1 + 1 \otimes T$ wie üblich.) Dann ist $\varphi = \eta_1(\beta) \eta_0(\beta^{-1})$
ein Automorphismus der Hopfalgebra $K[t][T]$, und zu $[\exp](t F \frac{\partial}{\partial T})$
kohomolog nach Konstruktion. Wie im Falle eines Grundkörpers
(vgl. [R]₁ p.530) weiß man, daß $\varphi(T) = \vartheta \in K[t][T]$ ein
 p -Polynom sein muß. Somit ist F kohomolog zu dem t -Koeffizi-
enten von ϑ , und damit ebenfalls ein p -Polynom.

b) $\Rightarrow$ a): O.E. sei F selbst ein p -Polynom. Durch Induktion sieht man: $D^{[i]}(T)$ ist immer ein p -Polynom ($D = F \frac{\partial}{\partial T}$). Folglich ist $[\exp](tD)$ ein Hopfalgebren-Homomorphismus, und die verzerrte Form A erbt die Hopfalgebrenstruktur nach der allgemeinen Abstiegstheorie, q.e.d.

b) $\Leftrightarrow$ c): Dies ist eine unmittelbare Folge von 2.1.16.

(2.4.3) BEMERKUNGEN. Bezeichne $\mathcal{F}$ die Menge aller Formen von A^1 (stets bezüglich $K|k$), $\mathcal{G}_r = \{X \in \mathcal{F} \mid X \text{ hat eine Gruppenstruktur}\}$, $\mathcal{P}_r = \{X \in \mathcal{F} \mid X \text{ ist parallelisierbar}\}$. Dann gilt $\mathcal{G}_r \subsetneq \mathcal{P}_r \subset \mathcal{F}$, und die zweite Inklusion ist genau dann echt, wenn $p \neq 2$.

BEWEIS: $\mathcal{G}_r \subset \mathcal{P}_r$ nach 2.4.1 und 2.4.2. Daß die Inklusion echt ist, sieht man am Beispiel $F = T^{2p}$ ($F = T^6$ für $p = 2$). Es ist $F_{[p]} = 0$, aber F ist zu keinem p -Polynom kohomolog, schon aus Gradgründen.

Sei $p \neq 2$; wir setzen $F = T^{\frac{p+1}{2}}$. Man errechnet $F_{[2]} = T^p$, $F_{[p]} = 0$. Wieder aus Gradgründen ($1 < (p+1)/2$) ist F zu keinem Polynom aus $KT + K[T^p]$ kohomolog. Für $p = 2$ ist $F_{[2]} = 0$ gleichbedeutend mit $F \cdot F' = \partial(F)$; dies erzwingt $F' = \text{const.}$, $F \in KT + K[T^2]$.

P.S. (ohne Beweis): Aus der zitierten Arbeit von Russell läßt sich folgern, daß man zwischen $\mathcal{G}_r$ und $\mathcal{P}_r$ noch die Klasse $\mathcal{H}_m$ derjenigen X legen kann, die homogener Raum unter einer Form von $G_{a,k}$ sind. Die entsprechende Bedingung an F lautet: $F = p\text{-Polynom} + \text{const.}$

Jetzt wollen wir zumindest für $X = \text{Spec}(A) \in \mathcal{P}_r$ explizite Präsentierungen, ausgehend von F , gewinnen, und schließlich das Genus berechnen. Sei also wie immer $X = \text{Spec}(A)$ eine durch $D = F \frac{\partial}{\partial T}$ definierte Form von A^1 , $F \in K[T^p]$.

(2.4.4) SATZ. $A \cong k[T^p, T - G] \subset K[T]$, wobei $G \in \sum_{i=1}^{p-1} \alpha^i k[T^p]$

so gewählt ist, daß $\partial(G) = F$. (Daß man F dergestalt nach α integrieren kann, folgt aus $\partial^{p-1}(F) = F_{[p]} = 0$ (2.1.16b)),

BEWEIS: $A = \text{Ke}(D+\partial)$ nach 2.1.15. Wir behaupten $\text{Ke}(D+\partial) = k[T^p, T-G]$. " $\supset$ ": Da $D+\partial$ eine k -Derivation ist, reicht es zu zeigen: $(D+\partial)(T^p) = 0$, $(D+\partial)(T-G) = 0$. Die erste Gleichung ist trivial; $(D+\partial)(T-G) = (D+\partial)(T) - (D+\partial)(G) = F+0 - (0+\partial(G)) = F - F = 0$.

" $\subset$ ": Nach Konstruktion ist $K \otimes A \xrightarrow{i} K[T]$, wobei i von der Einbettung $A = \text{Ke}(D+\partial) \subset K[T]$ induziert wird. Also ist $K \otimes \text{Ke}(D+\partial)$ kanonisch zu $K[T]$ isomorph, und es reicht zu zeigen: $\text{kan}: K \otimes k[T^p, T-G] \rightarrow K[T]$ ist schon surjektiv. $\text{Bi}(\text{kan})$ ist eine K -Algebra, die T^p und $T-G$ enthält; wegen $G \in K[T^p]$ folgt $T \in \text{Bi}(\text{kan})$ und die Behauptung.

(2.4.5) KOROLLAR. a) $A \cong k[U, V]/(V^p - U + H)$, wobei $H(U)$ aus $G(U)$ durch koeffizientenweises Potenzieren mit p hervorgeht. Deshalb gilt auch $H \in k[U^p]$.

b) Wenn A eine Hopfalgebrenstruktur trägt, so ist

$$A \cong k[U, V]/(V^p - U + a_1 U^p + a_2 U^{p^2} + \dots + a_n U^{p^n}), a_i \in K^p \subset k.$$

Dies ist im wesentlichen Russells Resultat 2.1 in unserem Spezialfall.

BEWEIS: a) Wir betrachten die durch $U \mapsto T^p$, $V \mapsto T-G$ definierte Surjektion f von Algebren: $k[U, V] \rightarrow A$. f faktorisiert über $k[U, V]/(V^p - U + H)$, da $f(V^p - U + H) = (T-G)^p - T^p + H(T^p) = T^p - G^p - T^p + (G(T))^p = 0$ (nach Definition von H). Da $V^p - U + H$ in $k(U)[V]$ irreduzibel ist (denn $U-H$ hat in $k(U)$ keine p -te Wurzel, weil U keine hat), ist die Faktorisierung von f aus Dimensionsgründen schon ein Isomorphismus.

b) Nach 2.4.2 können wir annehmen: F ist ein p -Polynom ohne linearen Term. Dasselbe gilt dann o.E. für G und auch für H , woraus die Behauptung folgt.

Als Hauptziel dieses Abschnitts wollen wir jetzt für alle parallelisierbaren Formen (insbesondere für die mit Gruppenstruktur) das arithmetische Genus als Funktion des Grades ausrechnen. Wir nehmen das Ergebnis vorweg:

(2.4.6) SATZ. Sei A eine parallelisierbare Form von $k[T]$, definiert durch $F \in K[T^p]$. Setze $n \cdot p := \deg(F)$ ($= \deg(G) = \deg(H)$). Dann hat $X = \text{Spec}(A)$ das arithmetische Genus

$$(np - 2) \cdot \frac{p-1}{2} \quad (n > 0).$$

N.B. Falls X sogar eine Gruppenstruktur trägt, ist n nach 2.4.2 Null oder eine Potenz von p .

Der BEWEIS benützt die Technik aus 2.3: Berechnung des Modells C von X durch explizites Aufblasen, und Berechnung der Dimension $\dim_K(\overline{S}/S)$ ($S = K \otimes_{C, \infty}$). Bei den technischen Einzelheiten, die zu den Beweisen in 2.3 analog sind, werden wir uns kürzer fassen.

Sollte $H = \text{const.}$ sein, so ist nach 2.4.5 offenbar $A \cong k[V]$, also $p_a(X) = 0$. Wir können also $n > 0$ annehmen.

Sei $\tilde{H} \in k[U, W]$ die Homogenisierung von $H \in k[U]$. Dann ist

$$Z = \mathcal{V}(V^{p(n-1)p} - U \cdot W^{np-1} + \tilde{H}) \subset \mathbb{P}_k^2$$

ein projektiver Abschluß von $\text{Spec}(A)$ nach 2.4.5. Der einzige unendlich ferne Punkt von Z ist der Punkt $\infty: (U:V:W) = (0:1:0)$. Hier liegt eventuell eine Singularität vor, die durch Blowing-up beseitigt werden soll. Die Ungleichung $V \neq 0$ definiert eine affine Umgebung Z' von ∞ mit Koordinaten $U/V, W/V$ (∞ entspricht dem Nullpunkt). Wenn wir hierfür wieder U, W schreiben, erhalten wir folgende Beschreibung von Z' :

$$Z' = (W^{(n-1)p} - U \cdot W^{np-1} + \tilde{H}) \subset \text{Spec}(k[U, W]).$$

Den Fall $n = 1$ stellen wir zurück (es wird sich zeigen, daß hier nicht aufgeblasen zu werden braucht).

∞ wird definiert durch $U = W = 0$. Wir blasen jetzt in ∞ auf und betrachten die strikte Transformierte $\tilde{Z}$ von Z' . Nach dem vor 2.3.15 Gesagten ist $\tilde{Z} = Z'_1 \cup Z'_2$, und für die Z'_1 hat man explizite Gleichungen. Betrachten wir zuerst die Gleichung für Z'_2 : Man setzt in die Gleichung für Z' ein tW anstelle von U und streicht alle gemeinsamen Faktoren W . Dies liefert die Gleichung

$$Z'_2 = \mathcal{V}(1 - tW^p + H^*(t, W)) \quad \text{mit } W|H^*, \text{ denn } \tilde{H} \text{ war} \\ \text{homogen in } U, W \text{ vom Grad } pn > 0.$$

Uns interessieren nur Punkte über ∞ ; Z'_2 hat aber offenbar keinen Punkt mit $W = 0$. Also müssen wir Z'_1 betrachten. Nach loc.cit. hat Z'_1 die Gestalt $\mathcal{V}(f)$, wobei f aus $w^{(n-1)p}U^{(n-1)p} - w^{np-1}U^{np-1} + \tilde{H}(U, wU)$ durch Streichen aller gemeinsamen Faktoren U hervorgeht (unser w entspricht u in loc.cit.), das heißt:

$$Z'_1 = \mathcal{V}(w^{(n-1)p} - w^{np-1}U^p + U^p \tilde{H}(1, w)).$$

Hier bekommt man wirklich (genau) einen Punkt über ∞ , nämlich $(w, U) = (0, 0)$. Wir schreiben wieder W für w , $Z^{(1)}$ für Z'_1 , und wir setzen den Aufblasungsprozeß fort. Es zeigt sich, daß die nächsten $n-2$ Schritte alle nach demselben Muster ablaufen. Für $n=2$ tut man gar nichts. Ansonsten blasen wir im Nullpunkt auf und berechnen $Z^{(1)}$. Da $Z^{(1)} = (w^{(n-1)p} - w^{np-1}U^p + U^p \tilde{H}(1, w))$, erhält man für $(Z^{(1)})_1$ durch Einsetzen von wU für W das Polynom $w^{(n-1)p}U^{(n-1)p} - w^{np-1}U^{np-1}U^p + U^p \tilde{H}(1, wU)$, und durch Kürzen von U^p die Gleichung $w^{(n-1)p}U^{(n-2)p} - w^{np-1}U^{np-1} + \tilde{H}(1, wU)$. Das heißt: $(Z^{(1)})_1$ hat keinen Punkt mit $U = 0$, denn $\tilde{H}(1, 0)$ ist nach Konstruktion genau der Leitkoeffizient von H , den wir $\neq 0$ nennen. Somit interessiert uns nur $(Z^{(1)})_2$. Einsetzen von tW für U und Kürzen liefert erst $w^{(n-1)p} - w^{np-1}t^pW^p + t^pW^p \tilde{H}(1, W)$ und dann $w^{(n-2)p} - w^{np-1}t^p + t^p \tilde{H}(1, W)$. Wenn wir wieder U für t schreiben, bekommen wir

$$Z^{(2)} (= (Z^{(1)})_2) = \mathcal{V}(w^{(n-2)p} - U^p w^{np-1} + U^p \tilde{H}(1, W))$$

mit $(U, W) = (0, 0)$ als einzigem Punkt über ∞ . Es hat sich also gegenüber der Gleichung von $Z^{(1)}$ nur der Exponent von W um p erniedrigt. Wenn man so fortfährt, bekommt man also für $Z^{(n-1)}$ genau einen Punkt über ∞ , und eine definierende Gleichung (0 entspricht dem Punkt über ∞):

$$Z^{(n-1)} = \mathcal{V}(W^p - U^p w^{np-1} + U^p \tilde{H}(1, W)).$$

Damit hat man die Singularität fast beseitigt; einmal muß noch aufgeblasen werden. Es ergibt sich

$$(Z^{(n-1)})_2 = \mathcal{V}(1 - t^p W^{np-1} + t^p \tilde{H}(1, W)),$$

und diese Kurve hat keinen Punkt mit $W = t = 0$. Jeder Punkt dieser Kurve über ∞ muß also zwar $W = 0$, aber $t \neq 0$ erfüllen, liegt also auch in $(Z^{(n-1)})_1$, wir müssen also nur dieses untersuchen. Einsetzen von wU für W und Kürzen:

$$(Z^{(n-1)})_1 = \mathcal{V}(w^p - U^{np-1} w^{np-1} + \tilde{H}(1, wU)).$$

Wir behaupten: Diese Kurve hat genau einen Punkt q über ∞ (d.h. mit $U = 0$), und ist in diesem Punkt regulär. Dazu reicht zu zeigen: in $R := k[w, U]/(w^p - U^{np-1} w^{np-1} + \tilde{H}(1, wU))$ ist (U) ein maximales Ideal ($R_{(U)}$ ist dann diskreter Bewertungsring, und der lokale Ring von q). Man errechnet $R/(U) = k[w]/(w^p + \gamma)$ (zur Erinnerung: $\gamma = \tilde{H}(1, 0)$ ist der Leitkoeffizient von H .) Nach Konstruktion war γ die p -te Potenz des Leitkoeffizienten von H , und dieser lag nach 2.4.1 nicht in k . Also ist $(-\gamma)^{1/p} \notin k$, und $R/(U)$ ist wunschgemäß ein Körper.

Ähnlich zeigt man für den bisher zurückgestellten Fall $n=1$: $Z' = \mathcal{V}(1 - UW^{p-1} + \tilde{H})$ hat genau einen Punkt über ∞ (d.h. mit $W = 0$) und ist in diesem Punkt regulär. Es ist nämlich $(k[U, W]/(1 - UW^{p-1} + \tilde{H}))_{(W)} = k[U]/(1 - \gamma U^p)$ ein Körper, wie oben.

Nach 2.3.4 - 2.3.6. ist jetzt noch folgendes zu tun, nachdem wir das Modell C von X jedenfalls in einer Umgebung des unendlich fernen Punktes kennen: Für den Ring $S := K \otimes R_{(U)}$ ist die K -Dimension von $\tilde{S}$ über S zu berechnen. Hierbei darf auch zur Komplettierung übergegangen werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} S &= K \otimes R_{(U)} \cong K[U, W]/(w^p - U^{np-1} w^{np-1} + \tilde{H}(1, wU))_{(U)} \\ &= K[U, w_1]/(w_1^p - U^{np-1} w_1^{np-1} + H'(wU))_{(w_1, U)} \quad (w_1 = w + \gamma^{1/p}) \end{aligned}$$

wobei man H' aus $\tilde{H}(1, wU)$ durch Weglassen des konstanten Terms bekommt. Die Koeffizienten von H' sind nach Konstruktion 2.4.5 alle p -te Potenzen in K , und H' hat nur Monome mit durch p teilbarem Exponenten. Also gibt es ein M

$\in WU \cdot K[WU]$ mit $M^p = H'(WU)$. Dann gilt: $\hat{S} \cong K[U, W_1][W_1^p - U^{np-1}W_1^{np-1} + H'(WU)]$ ($W = W_1 - \gamma^{1/p}$). Wegen $M \in (U)$ ist $K[U, W_1] = K[U, W_1 + M]$, wir können also W_1 durch $W_2 = W_1 + M$ ersetzen. Man erhält

$$\begin{aligned}\hat{S} &\cong K[U, W_2][W_2^p - U^{np-1}W_2^{np-1}] \\ &= K[U, W_2][W_2^p - U^{np-1}(W_2 - M - \gamma^{1/p})].\end{aligned}$$

Jetzt können wir uns auf die in 2.3.10 schon durchgeführte Rechnung stützen. Entspreche W_2 dem dortigen s und U dem dortigen π . Dann wird $np-1 \hat{=} i$, und $u = W_2 - M - \gamma^{1/p} \in K[U, W_2]$ wird tatsächlich eine Einheit. Nach dem letzten Beweisschritt von Satz 2.3.10 ist also die Wertehalbgruppe von $\hat{S}$ von p und i erzeugt. Nach 2.3.11 folgt die Behauptung.

Hierbei haben wir wieder den Spezialfall $n=1$ ausgelassen. Hier ist $\tilde{H} = \gamma U^p + \delta W^p$. Also ist $R_{(W)} \cong k[U, W]/(1 - UW^{p-1} + \tilde{H})_{(W)}$, $S = K[U, W]/(1 - UW^{p-1} + \tilde{H})_{(W)} \cong K[U_1, W]/(-UW^{p-1} + \gamma U_1^p + \delta W^p)_{(W)}$ (wobei $U_1 = U + \gamma^{-1/p}$ gesetzt wurde). Für S erhält man mit der neuen Setzung $U_2 = U_1 + (\frac{\delta}{\gamma})^{1/p} \cdot W$ die Präsentierung $K[U_2, W]/(-UW^{p-1} + \gamma U_2^p) = K[W, U_2]/(U_2^p - \gamma^{-1}(U_2 - (\frac{\delta}{\gamma})^{1/p}W - \delta^{-1/p})W^{p-1})$, und analog wie oben erschließt man mit $U_2 \hat{=} s$, $W \hat{=} \pi$, $p-1 \hat{=} i$ die Behauptung. q.e.d.

(2.4.7) BEMERKUNG. Wir haben gesehen, daß für jede parallelisierbare Form $\text{Spec}(A)$ die k -Algebra A von zwei Elementen erzeugbar ist. Es ist zu vermuten, daß im allgemeinen Fall zwei Elemente nicht hinreichen, aber dies ist selbst im simpelsten Beispiel $p = 3$, $F = T^2$ anscheinend schwer nachprüfbar (und uns nicht gelungen zu entscheiden). Man kann zeigen, daß p Elemente stets hinreichen.

3. Zum Kürzungsproblem über nichtperfekten Grundkörpern =====

(3.1) Der Hauptsatz und einige Lemmata

Sei k stets ein Körper. Wir vermuten, daß das Ergebnis von Fujita-Miyazaki-Sugie-Russell $[R]_2$:

$$A^{[1]} \cong k^{[3]} \implies A \cong k^{[2]} \quad (\text{"cancellation"})$$

auch dann richtig ist, wenn man k nicht wie obige Autoren als perfekt voraussetzt, können dies aber nicht ohne andere Zusatzvoraussetzungen beweisen. Im wesentlichen brauchen wir folgende Bedingung an die k -Algebra A :

(SE) ("smooth embedding"): $X = \text{Spec}(A)$ läßt sich offen in eine glatte vollständige k -Fläche S einbetten, sodaß der Divisor (!) $D := S - X$ die Eigenschaft s.n.c. erfüllt. s.n.c. ist die übliche "strong normal crossing"-Eigenschaft, Genaueres siehe unten.

(Eine k -Fläche soll immer ein nichtsinguläres zusammenhängendes k -Schema der Dimension 2 sein. Wie früher setzen wir Schemata stets als separiert und algebraisch über dem jeweiligen Grundkörper voraus.)

Der Nachdruck liegt bei (SE) auf dem Wort "glatte", und auf "s.n.c." X läßt sich ohne weiteres offen in eine projektive Fläche einbetten, denn X ist affin, integer und zweidimensional.

Bevor wir den Hauptsatz genau formulieren, benötigen wir einige Vorarbeiten. Die Theorie der rationalen Flächen über

algebraisch abgeschlossenen Körpern sowie die Theorie von Kurven auf Flächen und ihren Schnittzahlen setzen wir voraus.

Hier müssen wir noch einige Bemerkungen über Abstiegstheorie nicht notwendig affiner Schemata einfügen. Alles Relevante steht bei Grothendieck ([Gt]₁, insbes. Cor. 7.5). Die betrachtete treuflache Ringerweiterung soll hier stets eine rein inseparable Körpererweiterung $K|k$ sein. K ist dann über k radiziell. Deshalb sind nach loc.cit. alle Abstiegsdaten auf einem beliebigen K -Schema X (d.h. also Isomorphismen $\varphi: K \otimes X \rightarrow X \otimes K$ mit $\varepsilon_0(\varphi)\varepsilon_2(\varphi) = \varepsilon_1(\varphi)$) effektiv, das heißt, daß der Hauptsatz des treuflachen Abstiegs gilt. Genauer gesagt: Es gibt (bis auf Isomorphie genau) ein k -Schema Y und einen Isomorphismus $\beta: X \rightarrow K \otimes Y$, sodaß

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} K \otimes K \otimes Y & \xleftarrow{\varepsilon_0(\beta)} & K \otimes X \\ \text{kan} \uparrow & & \uparrow \varphi \\ K \otimes Y \otimes K & \xleftarrow{\varepsilon_1(\beta)} & X \otimes K \end{array}$$

kommutiert.

Es ist $(K \otimes K)/\text{Nil}(K \otimes K) \cong K$. Damit ist es sinnvoll, alle vier Ecken von (*) über $K \otimes K$ mit K zu tensorieren. Da $\nu: K \otimes K \rightarrow K$ die Multiplikation ist, erhält man

$$\begin{array}{ccc} K \otimes Y & \xleftarrow{\beta} & X \\ \text{id} \uparrow & & \uparrow \bar{\varphi} \\ K \otimes Y & \xleftarrow{\beta} & X. \end{array}$$

Also ist $\bar{\varphi}$ auf Punkten die Identität, und somit kommutiert

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} K \otimes X & \xleftarrow{\text{Spec}(\nu \otimes X)} & X \\ \varphi \uparrow & & \swarrow \\ X \otimes K & \xleftarrow{\text{Spec}(X \otimes \nu)} & \end{array}$$

$\text{Spec}(\nu \otimes X)$, $\text{Spec}(X \otimes \nu)$ kann man auf Punkten als Identität auffassen. Für uns wichtig ist folgendes Korollar:

(3.1.1) KOROLLAR. Sei $U \subset X$ offen. Dann läßt sich das Abstiegsdatum φ zu $\varphi|_U: K \otimes U \leftarrow U \otimes K$ einschränken. $\varphi|_U$ ist natürlich wieder ein Abstiegsdatum.

BEWEIS: $\text{Spec}(\nu \otimes X)$ ist bijektiv, und $U \rightarrow K \otimes U$ ist auch bijektiv. Deshalb ist $K \otimes U = \text{Spec}(\nu \otimes X)(U)$, und analog $U \otimes K = \text{Spec}(X \otimes \nu)(U)$. Da alle Morphismen in (**) bijektiv sind, folgt $\varphi(U \otimes K) = K \otimes U$, q.e.d.

Diese Möglichkeit, Abstiegsdaten auf X beliebig auf offene Teilmengen von X zu beschränken, wird uns insbesondere für sogenannte Zylinder X sehr nützlich sein. Wir definieren:

DEFINITION. a) Eine k -Fläche X heißt $\mathbb{P}^1$ -Zylinder, wenn es eine Kurve C über k gibt mit $X \cong \mathbb{P}_k^1 \times C$. (Es wird nicht verlangt, daß C bzw. X vollständig ist.)

b) Eine k -Fläche X heißt Zylinder, wenn es eine Kurve C über k gibt mit $X \cong \mathbb{A}_k^1 \times C$.

Zu jedem $(\mathbb{P}^1)$ -Zylinder X gehört eine kanonische Projektion $\pi_X: X \rightarrow C$ mit Fasern $\cong \mathbb{P}^1$ bzw. $\mathbb{A}^1$ (in der englischen Literatur "ruling" genannt).

(3.1.2) SATZ. Seien k, K wie oben, X ein K -Schema mit Abstiegsdatum φ , $U \subset X$ ein offener $\mathbb{P}^1$ -Zylinder über K . Dann existiert ein Abstiegsdatum φ_C für C , sodaß

$$\begin{array}{ccc} K \otimes U & \xleftarrow{\varphi|_U} & U \otimes K \\ \pi_{K \otimes U} \downarrow & & \downarrow \pi_{U \otimes K} \\ K \otimes C & \xleftarrow{\varphi_C} & C \otimes K \end{array}$$

kommutiert.

BEWEIS: Falls φ_C existiert, so ist es eindeutig bestimmt, da $\pi_{K \otimes U}$ Epi ist, und automatisch Abstiegsdatum (die Relation $\varepsilon_0(\varphi_C)\varepsilon_2(\varphi_C) = \varepsilon_1(\varphi_C)$ überträgt sich von der analogen Relation für $\varphi|_U$, weil $\pi_{K \otimes K \otimes U}$ Epimorphismus ist). Dies gilt auch für alle $C' \subset C$, $U' := \pi_U^{-1}(C')$. Damit ist gezeigt, daß das Problem in C lokal ist, d.h. wir dürfen annehmen $C =$

$\text{Spec}(A)$, $U \cong \mathbb{P}^1 \times \text{Spec}(A)$. $\mathbb{P}^1$ wird von $A^1 = \text{Spec}(K[s])$ und $\mathbb{P}^1 - \{o\} = \text{Spec}(K[s^{-1}])$ offen überdeckt, also wird U von $U_1 := \text{Spec}(A[s])$ und $U_2 := \text{Spec}(A[s^{-1}])$ überdeckt. φ läßt sich im Sinne von 3.1.2 auch auf U_1 bzw. U_2 einschränken. Man bekommt zwei Morphismen

$$\begin{aligned}\vartheta_1: K \otimes A[s] &\longrightarrow A[s] \otimes K, \\ \vartheta_2: K \otimes A[s^{-1}] &\longrightarrow A[s^{-1}] \otimes K,\end{aligned}$$

derart daß die beiden induzierten Abbildungen $K \otimes A[s, s^{-1}] \longrightarrow A[s, s^{-1}] \otimes K$ übereinstimmen. Dies impliziert $\vartheta_1(K \otimes A) = \vartheta_2(K \otimes A) \subset (A[s] \otimes K) \cap (A[s^{-1}] \otimes K) = A \otimes K$. $f := \vartheta_1|_{K \otimes A} = \vartheta_2|_{K \otimes A}$ ist also wohldefiniert. Wenn i (bzw. j) die Inklusion $A \rightarrow A[s]$ (bzw. $A \rightarrow A[s^{-1}]$) bezeichnet, so gilt $\text{Spec}(i) = \pi_U|_{U_1}$, $\text{Spec}(j) = \pi_U|_{U_2}$, und mit $\varphi_C := \text{Spec}(f)$ folgt die Behauptung.

Somit haben wir in obiger Situation Abstiegsdaten nicht nur für U , sondern auch für die "Basis des Zylinders" C , und die Daten sind mit π verträglich. Nach der Theorie des treuflachen Abstiegs bedeutet das:

(3.1.3) FOLGERUNG. Unter den Voraussetzungen des Satzes gibt es eine Fläche V über k , eine Kurve B über k und einen Morphismus $\psi: V \rightarrow B$, sodaß mit geeigneten Isomorphismen ν, β das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K \otimes V & \xleftarrow{\nu} & U \\ K \otimes \psi \downarrow & & \downarrow \pi_U \\ K \otimes B & \xleftarrow{\beta} & C \end{array}$$

kommutiert.

Als technisches Hilfsmittel brauchen wir ferner:

(3.1.4) SATZ. Sei $k \subset K \subset k_{\text{ins}}$, $K|k$ endlich. Sei S eine beliebige glatte Fläche über k , p ein k -rationaler Punkt von S . Bezeichne q den Punkt von $K \otimes S =: S_K$ über p .

a) $K \otimes B_p(S)$ und $B_q(K \otimes S)$ sind kanonisch isomorph.

($B_*(?)$ bedeutet die Aufblasung von ? in *.)

b) Existiere eine K -Fläche W und ein K -rationaler Punkt $q \in W$, sodaß $S_K \cong B_q(W)$. Dann existiert eine k -Fläche U mit einem k -rationalen Punkt p , sodaß ein kommutatives Diagramm besteht:

$$\begin{array}{ccc} S & \longleftarrow & S_K \\ \parallel & & \parallel \\ B_p(U) & \longleftarrow & B_q(W) \\ \downarrow & & \downarrow q \\ U & \xleftarrow{\text{kan}} & U_K \cong W. \end{array}$$

(Diesen Teil beweisen und verwenden wir nur unter der Zusatzvoraussetzung, daß W eine rationale Fläche ist, d.h. W geht durch endlich viele Aufblasungen K -rationaler Punkte aus $(\mathbb{F}_n)_K$ oder $\mathbb{P}_K^2$ hervor.)

BEWEIS: Man kann $(K:k) = p$ annehmen.

a) Sei $\underline{m}$ das Ideal von p . Dann ist wegen $\kappa(p) = k$ $K \otimes \underline{m}$ das Ideal von q . Nach Definition gilt: $K \otimes B_p(S) \cong K \otimes \text{Proj}_S(\underline{m}/\underline{m}^2) \cong \text{Proj}_{K \otimes S}(K \otimes (\underline{m}/\underline{m}^2) \cong \text{Proj}_{K \otimes S}((K \otimes \underline{m})/(K \otimes \underline{m})^2) \cong B_q(K \otimes S)$.

b) Wegen der Zusatzvoraussetzung " W rational" hat q eine zu $\mathbb{A}_K^2$ isomorphe Umgebung mit Koordinaten x und y ($q \hat{=}$ Nullpunkt). Da $B_q(W) \cong S_K$, trägt $B_q(W)$ ein Abstiegsdatum φ . Wegen $0 = q \in \text{Spec}(K[x, y]) \subset W$ ist $B_0(\text{Spec}(K[x, y])) \hookrightarrow B_q(W)$, wir können φ also einschränken und bekommen einen Kozyklus in $\text{Aut}(B_0(\text{Spec}(K \otimes K[x, y])))$, den wir wieder φ nennen. Es ist $B_0(\text{Spec}(K \otimes K[x, y])) = \text{Spec}(K \otimes K[x, \frac{y}{x}]) \cup \text{Spec}(K \otimes K[\frac{x}{y}, y])$. Wir können also φ zu φ_1, φ_2 auf diese beiden offenen Teilmengen einschränken, wobei die Restriktionen von φ_1 und φ_2 auf dem Durchschnitt $\text{Spec}(K \otimes K[x, y, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}])$ übereinstimmen, und bekommen Kozyklen affiner Algebren:

$$(K \otimes K)[x, \frac{y}{x}] \xrightarrow{\Phi_1} (K \otimes K)[x, \frac{y}{x}]$$

$$(K \otimes K)[\frac{x}{y}, y] \xrightarrow{\Phi_2} (K \otimes K)[\frac{x}{y}, y],$$

und wegen der Verträglichkeit von φ_1 mit φ_2 müssen Φ_1 und Φ_2

mindestens auf dem Durchschnitt $(K \otimes K)[x, y]$ ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, d.h. $\mathfrak{D}_1(K \otimes K[x, y])$ ist enthalten in $\text{Ziel}(\mathfrak{D}_1) \cap \text{Ziel}(\mathfrak{D}_2) = (K \otimes K)[x, y]$. $f := \mathfrak{D}_1|_{(K \otimes K)[x, y]}$ ist also wohldefinierter Algebrenendomorphismus, und ebenso bekommt man f^{-1} . f muß wieder ein Kozyklus von Algebren sein. Wir behaupten, daß f mit der Augmentation $x, y \mapsto 0$ verträglich ist, d.h. daß $f((x, y)) \subset (x, y) =: \underline{m}$. Hierzu schreiben wir, indem wir wie im 2. Kapitel $K \otimes K$ wieder mit $K[t]$ identifizieren: $f = [\exp](tD)$, $\mathfrak{D}_i = [\exp](tD_i)$ mit Derivationen D, D_i . Wir wollen zeigen: $D(x), D(y) \in (x, y)$. Wir wissen aber: $D_1(\frac{x}{y}) \in K[\frac{x}{y}, y]$. Nun ist nach der Quotientenregel $D_1(\frac{x}{y}) = \frac{-x \cdot D(y) + y \cdot D(x)}{y^2}$, und dieser Ausdruck liegt genau dann in $K[\frac{x}{y}, y]$, wenn der Zähler in $\underline{m}^2$ liegt (man vergleiche die Monome). Da der Zähler sicher in $\underline{m}$ liegt, und da $\underline{m}/\underline{m}^2$ K -frei mit Basis $\overline{x}, \overline{y}$ ist, folgt: $D(x)$ und $D(y)$ sind Null mod $\underline{m}$, liegen also in $\underline{m}$.

Den Kozyklus $\text{Spec}(f): \text{Spec}(K[x, y]) \otimes K \rightarrow K \otimes \text{Spec}(K[x, y])$ kann man fortsetzen zu einem Abstiegsdatum $\psi: W \otimes K \rightarrow K \otimes W$. (Außerhalb des Nullpunkts ist $\text{Spec}(f)$ Einschränkung von φ). Man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B_p(W) \otimes K & \xrightarrow{\varphi} & K \otimes B_p(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W \otimes K & \xrightarrow{\psi} & K \otimes W \\ q \otimes K \downarrow & & K \otimes q \downarrow \\ \text{Spec}(K) \otimes K & \xrightarrow{id} & K \otimes \text{Spec}(K) \end{array} ,$$

wobei id, ψ, φ Abstiegsdaten sind. Das untere Quadrat kommutiert, weil f mit der Augmentation verträglich ist.

Das gesamte Diagramm kann jetzt deszendiert werden, d.h. es existiert ein Diagramm

$$\text{Spec}(k) \xrightarrow{p} U \xrightarrow{\kappa} S,$$

welches nach Tensorieren mit K bis auf Isomorphie das Diagramm

$$\text{Spec}(K) \xrightarrow{q} W \xleftarrow{\text{kan}} B_p(W)$$

liefert.

(Daß man links $\text{Spec}(k)$ schreiben darf, liegt daran, daß id das triviale Abstiegsdatum ist.)

Wir behaupten: Die Abbildung κ faktorisiert durch $B_p(U) \rightarrow U$. Nach der universellen Eigenschaft des Blowing-up ([Ht] II 7.14) ist dies äquivalent dazu, daß $\kappa^*(\underline{m})$ eine invertierbare Idealgarbe auf U ist. Dies läßt sich aber durch Tensorieren mit K testen, und so kommt man auf die Frage: Ist $\text{kan}^*(\underline{m}_q)$ eine invertierbare Idealgarbe auf $B_p(W)$? Dies ist aber sicher so, denn $B_p(W) \xrightarrow{\text{kan}} W$ ist gerade die kanonische Blowing-Up - Abbildung. Also existiert die Faktorisierung β von κ , und $K \otimes \beta$ ist die Faktorisierung von kan durch β , also die Identität. Also kommutiert

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U & \xleftarrow{\kappa} & S \\
 & & \uparrow & \swarrow B_p(U) & \nwarrow \beta \\
 & & & & \uparrow \\
 K \otimes U \cong W & \xleftarrow{\text{kan}} & B_p(W) & \xrightarrow{\text{kan}} & B_q(W) \\
 & \nwarrow & \uparrow & \swarrow & \\
 & & B_q(W) & &
 \end{array}$$

Q. e. d.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns wieder dem Kürzungsproblem zu. Sei k wie immer ein Körper der Char. p , A eine k -Algebra mit $A^{[1]} \cong k^{[3]}$. Wenn wir mit $k_{\text{ins}} := k(k^{p^{-\infty}})$ die maximale rein inseparable Erweiterung von k bezeichnen, so ist k_{ins} perfekt, und nach $[R]_2$ gilt:

$$k_{\text{ins}} \otimes_k A \cong k_{\text{ins}}^{[2]}.$$

Nach dem Endlichkeitslemma 3.1.5 (s.u.) folgt: Es gibt eine endliche Erweiterung $k \subset L \subset k_{\text{ins}}$, so daß bereits $L \otimes_k A \cong L^{[2]}$. Natürlich gibt es einen Körperturm $k = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = L$, sodaß L_{i+1} über L_i rein inseparabel vom Grad p ist. (Solche Erweiterungen wurden im 2. Kapitel studiert.) Daraus ergibt sich durch Induktion nach n folgende

BEOBACHTUNG. Falls für jede rein inseparable Körpererweite-

zung $K|k$ vom Grad p gilt: $(A^{[1]} \cong k^{[3]} \wedge K \otimes_k A \cong K^{[2]} \Rightarrow A \cong K^{[2]})$, dann hat das am Kapitelanfang formulierte "Cancellation Problem" auch für nichtperfekte Grundkörper k eine positive Antwort.

Wir müssen hier noch ein Lemma nachtragen:

(3.1.5) LEMMA. Sei $K \subset M$ eine beliebige algebraische Körpererweiterung, X und Y K -Schemata, und $M \otimes_K X \cong M \otimes_K Y$. Dann existiert eine endliche Erweiterung $K \subset L \subset M$ mit $L \otimes_K X \cong L \otimes_K Y$.

BEWEIS: Schemata sind bei uns stets algebraisch. Sei $\varphi: M \otimes X \xrightarrow{\cong} M \otimes Y$. Indem man auf den Fall Y affin (also $\subset \mathbb{A}^n$) reduziert, sieht man, daß φ bereits über einer endlichen Erweiterung $K \subset L \subset M$ definiert ist, d.h. $\varphi = M \otimes_L \varphi$, $\varphi: L \otimes X \rightarrow L \otimes Y$. Nach der Theorie des treuflachen Abstiegs ist mit φ auch φ ein Isomorphismus.

Zurück zu unserer Beobachtung: Leider können wir deren Prämisse nicht beweisen; genauer gesagt, wir brauchen noch eine Zusatzvoraussetzung (SE), s.u. Diese Voraussetzung sollte natürlich bei rein inseparablen Grundkörpererweiterungen erhalten bleiben, damit das zu obiger BEOBACHTUNG verwendete Induktionsargument richtig bleibt.

Sei also A eine zweidimensionale reguläre integrale k -Algebra. (Aus $A^{[1]} \cong k^{[3]}$ folgt Integrität und sogar Glattheit von A .) Sei $\text{Spec}(A)$ offen eingebettet in ein zweidimensionales vollständiges reguläres Schema S . Wir behaupten: Das abgeschlossene Unterschema $D := S - \text{Spec}(A)$ besteht nur aus Kurven, i.e. es hat keine isolierten Punkte. Denn $\dim(D) \leq 1$ — und nehmen wir einmal an, D hätte den isolierten Punkt p . Wenn wir $X = \text{Spec}(A)$ mit einer affinen Umgebung $U(p)$ schneiden, erhalten wir etwas Affines, und für $U(p)$ klein genug erhalten wir $U(p) - \{p\}$. Es ist aber bekannt, daß eine affine reguläre Fläche minus einen Punkt niemals affin ist. (Vgl. [Ht] Ex. 1.3.6. Der wesentliche Punkt ist: Herausnehmen von p ändert den Ring der globalen Funktionen überhaupt nicht. Dafür reicht schon aus, daß $\mathcal{O}_p$ Cohen-Macaulay und mindestens zweidimensional ist.)

Aus diesem Exkurs folgt, daß D ein effektiver Divisor auf S ist.

Jetzt definieren wir "s.n.c." für einen beliebigen Divisor D auf einer regulären Fläche Y über k :

DEFINITION. D hat s.n.c. (strong normal crossing), wenn $D = \sum D_i$ mit verschiedenen Primdivisoren D_i , die alle glatt sind, und für die gilt: Es schneiden sich keine drei D_i in einem Punkt, und falls sich D_i und D_j in $p \in Y$ schneiden, so schneiden sie sich transversal. (I.e.: Für die lokalen Gleichungen $f, g \in \mathcal{O}_p$ von D_i bzw. D_j gilt $\mathcal{O}_p/(f, g) = k$.) Insbesondere ist der Schnittpunkt p k -rational.

Nun können wir endlich Bedingung (SE) präzise formulieren:

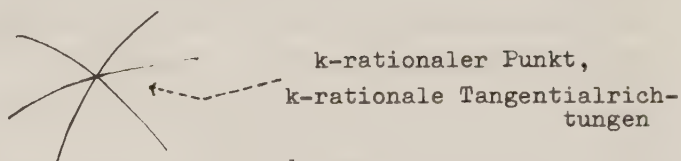
DEFINITION. Sei A eine 2-dimensionale glatte integrale k -Algebra. Dann sagen wir, daß A die Bedingung (SE) erfüllt, wenn sich $X := \text{Spec}(A)$ derart in eine glatte vollständige k -Fläche S einbetten läßt, daß $D := S - X$ s.n.c. hat.

(SE) steht für "smooth embedding".

BEMERKUNGEN. a) s.n.c. bleibt beim Tensorieren mit irgendeiner algebraischen Körpererweiterung L/k erhalten. Wir nehmen also an: $D = \sum D_i$ hat s.n.c. $L \otimes D_i$ ist eine glatte Kurve, also ist $L \otimes D_i$ disjunkte Vereinigung glatter Primdivisoren D_{ij} . Wenn D_{ij} und $D_{i',j'}$ sich in p nicht transversal schneiden, so ist $i \neq i'$, und $L \otimes D_i$ und $L \otimes D_{i'}$ schneiden sich ebenfalls nicht transversal in p . Sei q der Punkt aus Y unter $p \in L \otimes Y$. Seien $f, g \in \mathcal{O}_q$ lokale Gleichungen von D_i bzw. $D_{i'}$. Es folgt $(L \otimes \mathcal{O}_q) / (1 \otimes f, 1 \otimes g) \cong L \otimes (\mathcal{O}_q / (f, g))$. Falls D_i und $D_{i'}$ sich in q nicht schneiden, ist der rechte Ausdruck Null, was nicht sein kann. Also schneiden sie sich in q , und nach Voraussetzung ist $\mathcal{O}_q / (f, g) = k$, woraus die Behauptung folgt, denn $\mathcal{O}_p$ ist eine Lokalisierung von $L \otimes \mathcal{O}_q$, man hat also einen Widerspruch zur Nicht-Transversalität des Schnittes in p .

b) Für $k = \bar{k}$ ist Bedingung (SE) nach $[R]_2$ leer. Auch sonst kann man durch Aufblasen von S oft (SE) herstellen,

auch wenn es vorher nicht galt. Wenn etwa S glatt ist, aber D so aussieht:



denn kann man den Schnittpunkt aufblasen und erhält eine glatte Fläche $S' \supset X$ mit $D' := S' - X$ von der Gestalt



also ein Divisor mit s.n.c. Die Probleme beginnen zum Beispiel, wenn die Singularitäten von D nicht k -rational sind.

Unser Hauptsatz heißt nun:

(3.1.6) SATZ. Sei k ein Körper der Charakteristik $p < \infty$, $p \neq 2$. Wenn A eine k -Algebra ist mit $A^{[1]} \cong k^{[3]}$, und wenn A die Bedingung (SE) erfüllt, dann ist $A \cong k^{[2]}$.

Der Rest des Kapitels ist dem Beweis von 3.1.6 sowie des Hilfssatzes A gewidmet, der auch für sich Interesse verdient. Der Beweis lehnt sich stark an Russells Methoden für den perfekten Fall an. Nach der Beobachtung auf p.93 unten und Bem.a) auf p.95 haben wir also folgende

GENERALVORAUSSETZUNG: $X \subset S$ k -Schemata, $X \subset S$ offen, S vollständige glatte Fläche, $X \times \mathbb{A}_k^1 \cong \mathbb{A}_k^3$, $K \otimes_k X \cong \mathbb{A}_K^2$, $[K:k]=p$, $K|k$ rein inseparabel. $X = \text{Spec}(A)$. $D := S - X$ ist ein Divisor mit s.n.c.

BEHAUPTUNG: $X \cong \mathbb{A}_k^2$.

(3.2) Hauptteil des Beweises

Die Behauptung wird in drei Schritten bewiesen, deren erste beiden sich stark auf Russell stützen. Wir kürzen ab $S' :=$

$k' \otimes_k S$ etc., wobei k' der perfekte Abschluß von k sei.

Nach [Ka]₁ kann man für den Beweis des Hauptsatzes k als separabel abgeschlossen annehmen. Dann ist k' sogar algebraisch abgeschlossen.

1. Schritt: Sei $V \subset S$, S wie oben, $D := S - V$ habe s.n.c.

Ferner sei V birational zu X (insbesondere V' rational!), und affin, $\kappa(V) = -\infty$, D hänge zusammen. Dann existiert eine zulässige (s.u.) Aufblasung $\tilde{S}'$ von S' und eine irreduzible reduzierte Kurve $C \subset \tilde{S}'$ mit $p_a(C) = 0$, $C^2 \geq 0$, $C \cdot \tilde{D}' \leq 1$. ($\tilde{D}' := \tilde{S}' - V'$.)

2. Schritt: Mit Hilfe der Kurve C aus 1. zeigt man mit Hilfe von Lemmata aus 3.1: $X := V$ enthält einen affinen Zylinder. (Da $X' \cong \mathbb{A}^2$, gilt sicher $\kappa(X') = -\infty$.)

3. Schritt: Nach Satz A (3.3) folgt die Behauptung.

Zum ersten Schritt: Für jedes k -Schema T sind die Punkte von T "dieselben" wie die von T' . Wir sagen, daß ein Punkt $q \in T'$ "k-rational" ist, wenn der entsprechende Punkt $p \in T$ k-rational ist. (Selbstverständlich ist q nicht im normalen Sinne k-rational, da $\bar{k} \subset \kappa(q)$.) Eine zulässige Aufblasung $\tilde{S}'$ von S' entsteht dadurch, daß man (wiederholt) k-rationale Punkte von S auf D (bzw. bei Wiederholung: unendlich nahe bei D) aufbläst und dann mit $\tilde{D}'$ tensoriert. Nach 3.1.4 a) läuft es auf dasselbe hinaus, wenn man in S' "k-rationale" Punkte in oder unendlich nahe bei D' aufbläst. Wenn $\tilde{D}'$ die totale Transformierte von D' in $\tilde{S}'$ ist, so ist $\tilde{S}' - \tilde{D}' = V'$.

Zum Beweis der Behauptung im ersten Schritt stützen wir uns auf den Beweis von Theorem 1 bei Russel [R]₂. Seine Voraussetzungen sind fast dieselben:

NOTATION:	Russell	wir
	$V \subset S$	$V' \subset S'$
	$D = S - V$	$D' = S' - V'$
	$\kappa(V) = -\infty$	$\kappa(V') = -\infty$
	D zshgd. s.n.c.	D' zshgd. s.n.c.
	Grundkörper $k = \bar{k}$	$k' = \bar{k}'$

Bei uns sind alle von Russells Voraussetzungen (sinngemäß) erfüllt. Ferner sind alle Strukturen induziert von k -Strukturen, und V' ist affin (was Russell nicht voraussetzt.)

Das Problem ist, daß Russells Behauptung (V , also unser V' enthält einen affinen Zylinder) nicht das ist, was wir brauchen. In Schritt 2 wird ja sogar $A_k^2 \subset V'$. Russell beweist aber de facto unsere Behauptung (Schritt 1) mit: dies müssen wir durch Analyse seines Beweises deutlich machen.

Zur Vorbereitung noch einige Bemerkungen. Sei in einem konkreten Fall Schritt 1 bereits gezeigt. Dann gilt zusätzlich:

(3.2.1) D' ist ein Baum aus projektiven Geraden; $C \cong \mathbb{P}^1$.

([R]₂ 2.1.)

(3.2.2) Es existieren unendlich viele C^* mit den Eigenschaften von C , sodaß zusätzlich: $C^* \cap D'$ ist ein " k -rationaler" Punkt (falls $C \cdot D' = 1$), bzw.: C^* enthält einen " k -rationalen" Punkt (falls $C \cdot D' = 0$). Außerdem kann man vorschreiben, daß C^* nicht durch einen vorher gewählten Punkt s geht.

BEWEIS: a) Nehmen wir an $C \cdot D' = 1$. Dann gilt für die Primkomponenten $D'_1, \dots, D'_m$ von D' o.E.: $C \cdot D'_1 = 1$, $C \cdot D'_i = 0$ ($i=2, \dots, m$). Wenn C_1 ein beliebiger zu C äquivalenter irreduzibler reduzierter effektiver Divisor ist, so gilt ebenfalls: $C_1 \cdot D'_1 = 1$, $p_a(C_1) = 0$ (Adjunktionsformel!), $C_1^2 \geq 0$, $C_1 \cong \mathbb{P}^1$. Die Idee ist folgende: Wenn C_1 ganz $|C|$ (=Menge der zu C linear äquivalenten Divisoren) durchläuft, dann durchläuft der Schnittpunkt $C_1 \cap D'_1$ fast ganz D'_1 .

$|C|$ hat die Struktur eines projektiven Raumes $\mathbb{P}^d$ über k' . Für eine Zariski-offene Teilmenge $U \subset |C|$ ist nach BERTINI D'_1 keine Komponente von $C_1 \in U$ und $C_1 \in U$ glatt. Angenommen, U wäre leer. Dann ist $C \notin U$, also D'_1 Komponente von C , also $D'_1 = C$. Sei dann C_1 beliebig aus $|C| - \{C\}$; dies geht, da nach Russell $\dim |C| = h^0(C) - 1 \geq 2 - p_a(C) + C^2 - 1 = 1 + C^2 \geq 1$. Wäre D'_1 auch (echte!) Komponente von C_1 , so wäre C echte Komponente von C_1 , was wegen $C \sim C_1$ nicht geht. Also ist D'_1 keine Komponente fast aller $C_1 \in |C|$, und nach BERTINI ist U nicht leer.

Wir betrachten die Menge

$$\emptyset \neq M = \{p \mid p \in D'_1, \{p\} = C_1 \cap D'_1 \text{ für ein } C_1 \in U\}.$$

Falls wir die Endlichkeit von $D'_1 - M$ zeigen können, sind wir aus folgendem Grund fertig: Wegen $p \neq 2$ ist nach Satz 2.2.7 $D_1 \cong \mathbb{P}_k^1$, da $D'_1 \cong \mathbb{P}_k^1$. Deshalb enthält D'_1 unendlich viele "k-rationale" Punkte, und deshalb gibt es unendlich viele C^* mit den verlangten Eigenschaften, ausgenommen $\notin C^*$. Der Beweis dieser Endlichkeit erfordert etwas Technik.

U und $|C|$ sind k' -Schemata. Wir betrachten $U \times S' \supset Y := \{(C_1, p) \mid p \in C_1 \in U\}$. Y ist durch Gleichungen definiert, also abgeschlossenes Unterschema von $U \times S'$. Sei $\pi_2: U \times S' \rightarrow S'$ die zweite Projektion. Dann ist nach Def.

$$M = \pi_2(Y \cap (U \times D'_1)) \subset D'_1.$$

Nach dem Satz von CHEVALLEY ist also $M \subset D'_1$ konstruktibel. Die Einschränkung der ersten Projektion $\pi_1: Y \cap (U \times D'_1) \rightarrow U$ ist bijektiv, da für jedes $C_1 \in U$ genau ein Schnittpunkt $\{p\} = C_1 \cap D'_1$ existiert. Da U zusammenhängend ist und alle Zariski-topologien kompakt, ist auch das Urbild $Y \cap (U \times D'_1)$ zusammenhängend, und damit auch $M = \pi_2(Y \cap (U \times D'_1))$. Somit ist M konstruktibel und zusammenhängend. Da D'_1 eine irreduzible Kurve ist, gibt es theoretisch zwei Möglichkeiten:

$\alpha)$ $M = \{p\}$ ist einpunktig;

$\beta)$ $D'_1 - M$ ist endlich.

Es reicht zu zeigen, daß $\alpha)$ nicht auftritt, was noch einige Rechnung verlangt. Würde $\alpha)$ auftreten, so gingen alle $C_1 \in U$ durch p , d.h. da $U \subset |C|$ dicht, gingen sogar alle $C_1 \in |C|$ durch p , d.h. p wäre ein sogenannter Basispunkt von $|C|$. Dies ist zu widerlegen.

Sei $n = C^2$. Für $0 \leq i \leq n$ sei $S'^{(i)}$ die k' -Fläche, die man aus S' durch Aufblasen von i Punkten unendlich nahe bei p erhält, und sei $C^{(i)}$ die strikte Transformierte von C . Nach Russell gilt:

$$\begin{aligned} h^0(C) &\geq 2 - p_a(C) + C^2 = 2 + n \text{ (wie oben);} \\ h^0(C^{(n)}) &= 2 \text{ (Beweis von 2.3). in } [R]_2. \end{aligned}$$

Wir behaupten:

(*) $h^0(C^{(i+1)})$ ist höchstens um 1 kleiner als $h^0(C^{(i)})$.

Aus (*) folgt $h^0(C^{(i+1)}) = h^0(C^{(i)}) - 1$, insbesondere $h^0(C^{(1)}) = h^0(C) - 1$. Wäre jetzt p Basispunkt von $|C|$, so wäre der exzeptionelle Divisor E der ersten Aufblasung eine fixierte Komponente von $|C^{(1)} + E|$ auf $S^{(1)}$. Dann wäre aber $h_{S^{(1)}}^0(C^{(1)}) = h_{S^{(1)}}^0(C^{(1)} + E) = h_{S^{(1)}}^0(C)$, Widerspruch. Also ist nur noch (*) zu zeigen. O.E. sei $i=0$. $h_{S^{(1)}}^0(C) = h_{S^{(1)}}^0(C^{(1)} + E)$. Die Kohomologiesequenz auf $S^{(1)}$ für die exakte Folge

$$(0 \rightarrow \mathcal{L}(-E) \rightarrow \mathcal{O}_{S^{(1)}} \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0) \otimes \mathcal{L}(C^{(1)} + E)$$

liefert

$$0 \rightarrow H^0(C^{(1)}) \rightarrow H^0(C^{(1)} + E) \rightarrow H^0(\mathcal{L}(C^{(1)} + E) \otimes \mathcal{O}_E),$$

und der letzte Term ist isomorph zu $H_E^0((C^{(1)} + E) \cdot E) \cong \cong H_{\mathbb{P}^1}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0)) = k'$, denn $E \cong \mathbb{P}^1$ und $(C^{(1)} + E) \cdot E = C^{(1)} \cdot E + E^2 = 1 + (-1) = 0$. Also ist $h^0(C) = h^0(C^{(1)} + E) \leq h^0(C^{(1)}) + 1$.

Jetzt wissen wir also, daß $|C|$ basispunktfrei ist. Insbesondere gehen fast alle $C_1 \in U$ nicht durch s , und indem man den Beweis mit $U_s := \{C_1 \in U \mid s \notin C_1\}$ wiederholt, sieht man, daß man auch die Zusatzforderung $s \notin C^*$ für unendlich viele C^* erfüllen kann.

b) Sei jetzt $C \cdot D' = 0$. Genau wie in a) zeigt man, daß $|C|$ keine Basispunkte hat. Seien U und Y wie in a). Wir betrachten die Projektion $\pi_2: U \times S' \supset Y \rightarrow S'$. Die Faser von π_2 in $q \in S'$ ist die Menge aller (C_1, q) mit $q \in C_1$, also sicher nicht ganz $U \times \{q\}$, d.h. die Faser hat Dimension $< \dim(U) = \dim(Y) - 1$, also Kodimension ≥ 2 in Y . Hieraus folgt, daß $\text{Bi}(\pi_2)$ in keiner eindimensionalen Untervarietät von S' liegen kann. Nach CHEVALLEY enthält $\text{Bi}(\pi_2)$ eine offene dichte Teilmenge von S' . Die "k-rationalen" Punkte liegen aber aus folgendem Grund dicht in S' : S ist birational zu einem Retrakt X von $\mathbb{A}^3$, wo die rationalen Punkte dicht liegen, also liegen die rationalen Punkte in S dicht. Also gibt es in $(\text{Bi}(\pi_2) - \text{endlich viele Kurven})$ immer einen k-rationalen

Punkt $p = \pi_2(C^*, p)$, woraus die Behauptung folgt.

(3.2.3) Falls C die Behauptungen in Schritt 1 und auch Bedingungen (3.2.2) erfüllt, dann kann man nach Russell (Lemma 2.3) durch Aufblasen bei $p := C \cap D'$ (oder $p \in C$ beliebig "k-rational") sogar $C^2 = 0$ erreichen. Die Hauptsache ist hierbei für uns, daß die Aufblasungen zulässig sind.

Nach diesen Präliminarien können wir endlich Schritt 1 beweisen. Russell beweist sein Theorem 1 zunächst für S' relativ minimal (2.8). Im allgemeinen Fall beweist er die Behauptung entweder direkt (über 2.3, 2.4, 2.5) oder er führt das Problem auf eine andere Fläche S' zurück, für welche K^2 , das Quadrat des kanonischen Divisors, größer ist als ursprünglich. (2.9). Da K^2 immer ≤ 9 ist, ist damit sein Theorem vollständig bewiesen. Wir müssen nur demonstrieren, daß 2.3, 2.4, 2.5, 2.8 (mit unserer modifizierten Behauptung) sowie der Induktionsschritt 2.9 mit modifizierter Voraussetzung und Behauptung richtig sind. (Leider haben wir keinen "glatteren" Beweis von Schritt 1 gefunden.)

Zu 2.3: Sei (§) die Behauptung des 1. Schrittes. Wenn man in 2.3 Russells Behauptung durch (§) ersetzt, erhält man eine Tautologie. (2.3 besagt i.W.: (§) $\Rightarrow V'$ enthält einen affinen Zylinder.)

Zu 2.4: Seien die Voraussetzungen von 2.4 erfüllt. Russell beweist 2.4 durch Zurückführung auf 2.3, deshalb gilt hier dann auch (§).

Zu 2.5: Hier ist etwas zu tun (insbesondere weil Russells Beweis sehr knapp ist). Unserer Ansicht nach fehlt in 2.5ii) in der Voraussetzung der Zusatz $r(D_n) \leq 1$ (in Russells Notation), d.h. D_n trifft höchstens eine weitere Komponente von D . Russell zitiert 2.5 an drei Stellen, nämlich in 2.8 (s.u.), und zweimal auf der vorletzten Seite des Beweises von Thm.1. Im ersten Fall ist ohnehin $r(D_j) = 1$ ($\forall j$), und im zweiten Fall hat man: $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$, $r(D_1) \leq 2$, und zwangsläufig muß bei geeigneter Numerierung $r(D_n) \leq 1$ werden, weil D

keine Zyklen enthält. In Anbetracht dieser Tatsachen beweisen wir (unsere Version von) 2.5 ii) mit der zusätzlichen Annahme $r(D_n) \leq 1$.

Damit sind die Voraussetzungen in unserer Notation: $D'_1, \dots, D'_m$ sind irgendwelche Komponenten von D' , $(D'_1)^2 \geq 0$, $r(D'_1) \leq 2$, $D'_i \cdot D'_{i+1} \leq 1$ ($1 \leq i < m$), $r(D'_m) \leq 1$. Wir übernehmen Russells Fallunterscheidung: Falls $r(D'_1) \leq 1$, trifft D'_1 den Rest von D' höchstens einmal, und wegen s.n.c. in einem k -rationalen Punkt p . Russells Argument liefert also zulässige Aufblasungen, und da für die aufgeblasene Fläche (§) bewiesen wird, sind wir hier fertig.

Der allgemeine Fall wird auf den Fall $r(D'_1) \leq 1$ zurückgeführt, mittels Induktion über m sowie absteigende Nebeninduktion über $(D'_2)^2$. Die erste Induktion unterschlägt Russell. $m=1$ ist genau der obige Fall. Sei m beliebig. Falls $N := (D'_2)^2 \geq 0$, so numeriert man um: D'_2 wird das neue D'_1 etc., und man ist im Fall $m-1$. Falls $N < 0$, führt man die Situation auf eine analoge zurück, in der N größer ist. Dies geht genauso wie bei Russell, nur ist wieder zu berücksichtigen, daß die verwendeten Aufblasungen zulässig sind. Außerdem wird eine exzeptionelle Kurve kontrahiert (der zur Aufblasung entgegengesetzte Prozeß), und um sicher zu sein, daß die erhaltene k' -Fläche von einer k -Fläche induziert wird, muß man 3.1.4 b) verwenden.

Zu 2.8 (relativ minimaler Fall): Da die anderen Fälle alle auf 2.5 (mit $m=1$) zurückgeführt werden, ist nur der mit "Clearly" beginnende Satz zu betrachten. $D' = \emptyset$ oder $D' = \Delta$ sind aber beide unmöglich, da $\mathbb{F}_n$, $\mathbb{F}^2$, $\mathbb{F}_n - \Delta$ allesamt nicht affin sind.

Zu 2.9 (Induktionsargument): Wir behaupten:

Sei $E \subset S'$ wie in 2.6, d.h. E reduziert und irreduzibel, $E^2 = -1$, $h^0(E + D' + K) = 0$. (K ist der kanonische Divisor auf S'). Sei S^0 die aus S' durch Kontraktion von E entstehende Fläche, $V^0 = V' - E \subset S^0$. Dann erfüllt $V^0 \subset S^0$ alle Voraussetzungen von Schritt 1, und (§) für $V^0 \subset S^0$ impliziert (§) für $V' \subset S'$.

BEWEIS der Behauptung:

Wie Russell selbst zeigt, ist $\kappa(V^0) = \kappa(V') = -\infty$, und V^0 ist im Unendlichen zusammenhängend (i.e. $D^0 := S^0 - V^0$ hängt zusammen). V^0 ist wieder affin. Es ist noch zu zeigen, daß S^0 und V^0 von k -Flächen T, W induziert sind. Nach Lemma 3.1.4b) ist aber $S \cong B_p(T)$ für eine k -Fläche T und einen k -rationalen Punkt $p \in T$, derart daß nach Tensorieren mit k' p genau die Kontraktion von E ist. (S' ist die Aufblasung von S^0 in diesem Punkt.) Also ist $V^0 = T' - D' = W'$, $S^0 = T'$, und $T - D$ ist birational zu V , also auch zu X . Also sind die Voraussetzungen von Schritt 1 alle wieder erfüllt.

Gelte also (§) für $V^0 \subset S^0$. Dies heißt: Es existiert eine Kurve C^0 auf einer zulässigen Aufblasung S^+ von S^0 mit den verlangten Eigenschaften. Sei p die Kontraktion von E ; wie wir wissen, ist p " k -rational". Sollte p in S^+ bereits aufgeblasen sein, dann ist gar nichts zu tun, denn S^+ ist dann auch eine (zulässige) Aufblasung von $S' = B_p(S^0)$. Ansonsten WÄHLE man C^0 so, daß $p \notin C^0$. (Dies ist nach 3.2.2 möglich.) Dann kann man p wieder aufblasen, ohne C^0 (und insbesondere die Schnittzahlen) anzutasten, und bekommt (§) für S' .

Damit ist Schritt 1 bewiesen.

Wir setzen jetzt $V := X$. (N.B. Im Beweis von Schritt 1 kommt man leider mit diesem einen Fall nicht aus, wegen des Russellschen Induktionsarguments!) Es ist $\kappa(V') = \kappa(\mathbb{A}^2) = -\infty$. Wir nennen die nach 3.2.2 existierende Kurve C^* wieder C ; C erfülle also (§) und 3.2.2. Insbesondere gilt entweder $C \cdot D' = 0$ (dann enthält C einen k -rationalen Punkt p) oder $C \cap D' = \{p\}$, p k -rational. Wie bei Russell (2.3) kann man durch geeignetes zulässiges Aufblasen von p erzwingen: $C^2 = 0$, unter Bewahrung der übrigen Eigenschaften von C . Jetzt lehnen wir uns an den Beweis von 2.3 an, um Schritt 2 zu zeigen.

Wir rekapitulieren die Situation: $X \subset S$, S ist glatt, $D = S - X$ hat s.n.c. und $C \subset S'$ mit $C^2 = 0$, $C \cdot D' \leq 1$, $C \not\cong \mathbb{P}^1$; nach Russell ist $|C|$ basispunktfrei, irreduzibel und $\dim |C|$

= 1. Also definiert $|C|$ einen Morphismus

$$\varphi: S' \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

S' wird durch φ sogar fast eine Regelfläche, denn die Fasern von φ sind die Elemente von $|C|$, die, sofern sie glatt sind, schon isomorph zu $\mathbb{P}^1$ sind. Wir entfernen aus S' alle Fasern von φ , die entweder nicht isomorph zu $\mathbb{P}^1$ sind oder eine Komponente von D' sind, mindestens aber eine (zur Not eine willkürlich gewählte). Hierdurch erhält man eine offene Teilmenge $U \subset S'$ und eine Abbildung $\varphi = \varphi|U: U \rightarrow \Gamma$, wobei $\Gamma = \mathbb{P}^1$ - endlich viele Punkte. Alle Fasern dieses Morphismus φ sind isomorph zu $\mathbb{P}^1$.

Nach Russell zerfällt φ generisch, das heißt: Wenn man U und Γ notwendigenfalls noch verkleinert, bekommt man $U \cong \mathbb{P}^1 \times \Gamma$, wobei φ zur zweiten Projektion wird.

S' und damit auch U tragen ein Abstiegsdatum. Damit können wir 3.1.3 anwenden (Endlichkeitslemma!) und erhalten eine k -Kurve Δ , ein offenes Unterschema Y von S und einen Morphismus $\psi: Y \rightarrow \Delta$, sodaß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S' \supset Y' & \xrightarrow{\psi'} & \Delta' & & \\ \parallel & \searrow \cong & \downarrow \cong & & \\ S' \supset U & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma & & \end{array}$$

für geeignete vertikale Isomorphismen kommutiert. (Wir haben also die Struktur eines Zylinders auf Niveau k deszendiert.)

Sei η der generische Punkt von Δ . Über η liegt genau ein Punkt η' von $\Delta' \cong \Gamma$, nämlich der generische, und $\kappa(\eta')$ ist rein inseparabel über $\kappa(\eta)$. $\kappa(\eta) \otimes_{\Delta} Y = Y_{\eta}$ ist eine Kurve über $\kappa(\eta)$, und $\kappa(\eta') \otimes_{\Delta'} Y_{\eta'} = \kappa(\eta') \otimes_{\kappa(\eta)} Y_{\eta'}$ ist isomorph zu $\mathbb{P}_{\kappa(\eta')}^1$. Weil die Charakteristik nicht 2 ist, ist nach 2.2.7 $Y_{\eta} \cong \mathbb{P}_{\kappa(\eta)}^1$.

Sei $V = Y - D$. (i.a. ist nicht $D \subset Y$.) Wir behaupten: $V_{\eta} \cong \mathbb{A}_{\kappa(\eta)}^1$. Hierzu reicht es zu zeigen, daß $Y_{\eta} - V_{\eta}$ ein $\kappa(\eta)$ -rationaler Punkt von Y_{η} ist. ($\mathbb{P}^1 - \{\text{rat. Punkt}\} \cong \mathbb{A}^1$.) Es ist $D_{\eta} = Y_{\eta} - V_{\eta}$, es reicht also zu zeigen: $D_{\eta}' = k' \otimes_k D_{\eta}$

$\cong \text{Spec}(\kappa(\eta'))$. D' ist ein Schema über Γ , und wir wollen, daß seine generische Faser ein einfacher Punkt ist. Dafür ist hinreichend (und notwendig), daß für fast alle $\gamma \in \Gamma$ die Faser D'_γ ein einfacher Punkt ist. Nun ist aber D'_γ der schematische Durchschnitt von D' mit $\varphi^{-1}(\gamma) \sim C$, und $C \cdot D'$ ist Null oder Eins. Im ersten Fall folgt $D'_\gamma = \emptyset$, $V_\eta \cong \mathbb{P}_{\kappa(\eta)}^1$, was wegen der Affinität von V_η nicht geht. Also ist $C \cdot D' = 1$, alle D'_γ sind also einfache Punkte wie verlangt.

Somit ist $V_\eta \cong \mathbb{A}_{\kappa(\eta)}^1$. Sei $\Delta = \text{Spec}(R)$, $V = \text{Spec}(A)$, wobei R, A k -Algebren vom endlichen Typ sind. Da V ein Δ -Schema ist, ist A eine R -Algebra. $V_\eta \cong \mathbb{A}_{\kappa(\eta)}^1$ besagt nur: $\text{Quot}(R) \otimes_R A \cong \text{Quot}(R)[T]$, und dies ist zu $A_f \cong R_f[T]$ für ein $f \in R \setminus \{0\}$ äquivalent. Nach Konstruktion ist $\text{Spec}(A_f) \subset \text{Spec}(A) = V \subset X$, $\text{Spec}(A) \subset X$ offen, und $\text{Spec}(A_f) \cong \mathbb{A}^1 \times \text{Spec}(R_f)$, d.h. X enthält wie gewünscht einen affinen Zylinder.

Nun sind wir für den dritten Schritt bereit: Es gilt

SATZ A : Sei k separabel abgeschlossen, A eine zweidimensionale glatte k -Algebra vom endlichen Typ, A geometrisch faktoriell (d.h. $L \otimes_k A$ faktoriell für alle algebraischen Erweiterungen $L|k$), und $(L \otimes_k A)^* = L^*$. Wenn $\text{Spec}(A)$ einen offenen affinen Zylinder enthält, dann ist $A \cong B[T]$ für eine k -Algebra B .

Der BEWEIS wird in (3.3) geführt.

In unserer Situation ist Satz A anwendbar, denn X ist nach Voraussetzung affin, $L \otimes_k X$ ist als Retrakt von $\mathbb{A}_L^3$ faktoriell, und $\mathcal{O}(L \otimes_k X)$ kann als Retrakt von $L^{[3]}$ keine nichtkonstanten Einheiten haben. Außerdem haben wir gerade (mühevoll) gezeigt, daß X einen affinen Zylinder enthält.

Also ist $A \cong B[T]$, somit wegen $A^{[1]} \cong k^{[3]} : B^{[2]} \cong k^{[3]}$, d.h. B ist eine projektive k -Algebra, aus Dimensionsgründen in einer Variablen. Nach Kap. I ist $B \cong k^{[1]}$, also $A \cong k^{[2]}$, und der Hauptsatz ist bewiesen.

(3.3) Beweis von Satz A

Der bereits oben formulierte Satz A ist für $k = \bar{k}$ bekannt und stammt i.w. von W. Heinzer ([R]₂ Remark (i) nach Thm.4). Für $k = \bar{k}$ folgt sogar $B \cong k^{[1]}$.

Unser Beweis verwendet Hilfssätze von Russell und Sathaye [R-Sa]. Wir verwenden die obigen Notationen.

Nach Voraussetzung enthält $\text{Spec}(A)$ den affinen Zylinder $U \cong \Gamma \times \mathbb{A}^1$ als offene Teilmenge. Mit A ist auch Γ glatt, und Γ kann wegen der Affinität von $\text{Spec}(A)$ nicht vollständig sein, ist also von der Form $\text{Spec}(R)$. Mit dem Argument von p. 94 sieht man, daß $\text{Spec}(A) - U$ keine isolierten Punkte hat, also rein eindimensional ist. Weil A faktoriell ist, ist $U = \text{Spec}(A_a)$ für ein $a \in A - \{0\}$. Somit haben wir:

$$A_a \cong R[T], \text{ und } R \text{ ist als } A\text{-Koordinatenring} \\ \text{der glatten Kurve } \Gamma \text{ dedekindsch.}$$

Wir identifizieren A_a mit $R[T]$. Sei B der Ring $A \cap R$. Behauptung: Auch B ist dedekindsch. Es gilt $a \in R^* (= (R[T])^*)$, also $a \in B$. Daraus folgt $B_a \subset R$. Andererseits hat jedes $x \in R$ die Form y/a^n , $y \in A$. Dann muß wegen $a \in R$ auch $y \in R$ sein, d.h. $y \in B$, und wir haben $B_a = R$. B ist (mit R und A) wieder ganz abgeschlossen und hat den Quotientenkörper $K := \text{Quot}(R)$. B ist als ganzabgeschlossener Ring mit Quotientenkörper K eindimensional (direkter Limes von k -Algebren endlichen Typs mit Transzendenzgrad 1 über k). Uns fehlt für " B Dedekindsch" nur noch, daß B noethersch ist. Hierzu dürfen wir mit $\bar{k}$ tensorieren, da mit $\bar{k} \otimes_k B$ auch B noethersch ist, und da die ganze Situation sich sinngemäß überträgt. Für $k = \bar{k}$ folgt aber aus $\text{Pic}(\Gamma) = 0$: $R \cong k[\tau, \frac{1}{f(\tau)}]$ für ein $f(\tau) \in k[\tau]$. (Siehe [Cn]: Any PID over F is isomorphic to a localization of $F[x]$; vergleiche die näheren Ausführungen in [Gr]₁ 2.2.5.) Nach [R]₂ Lemma 3.1 kann man

R auch darstellen als $R \cong k[\tau', \frac{1}{g(\tau')}]$, sodaß in der Gleichung $A_a = R[T]$ schon $\tau' \in A$ gilt. Also ist $k[\tau'] \subset B = A \cap R$, und wir behaupten Gleichheit. Läge ein echter Bruch $h(\tau')/n(\tau')$ in B , so bekäme man (o.E. $\text{ggT}(h,n) = 1$) den Stammbruch $1/n(\tau')$ in A , was wegen $k[\tau'] \subset A$ ein Widerspruch zu $A^* = k^*$ ist. Wir haben gezeigt: Für $k = \bar{k}$ ist $B \cong k^{[1]}$, also noethersch. Somit ist B dedekindsch.

Jetzt müssen wir einen technischen Begriff aus [R-Sa] einführen: Seien $B \subset A$ k -Algebren, $S \subset B$ multiplikativ abgeschlossen. Dann heißt $B \subset A$ S -inert, wenn folgendes gilt:

a) $B_S \cap A = B$;

Für jede algebraische Erweiterung $E|k$ und jedes Primideal $\underline{p} \subset E \otimes B$ der Höhe 1 gilt:

b) $\underline{p} \cdot (E \otimes A)$ ist prim;

c) $\text{Quot}((E \otimes B)/\underline{p})$ ist in $\text{Quot}((E \otimes A)/\underline{p}(E \otimes A))$ algebraisch abgeschlossen;

d) $(E \otimes B)/\underline{p}$ ist in $(E \otimes A)/\underline{p}(E \otimes A)$ ganz abgeschlossen.

Wir wollen folgenden Satz ([R-Sa] 2.5.2) anwenden:

(3.3.1) SATZ (Russell-Sathaye). Seien B, A, S wie in der Definition, B und A vom endlichen Typ über k . Gelte ferner:

(i) B ist ein lokal faktorieller Krullring;

(ii) $A_S = B_S[T]$;

(iii) B ist S -inert in A .

Dann ist $A \cong S_B(P)$ symmetrische Algebra eines invertierbaren B -Moduls.

In unserer Situation haben wir A und B bereits; wir setzen $S = \{1, a, a^2, \dots\}$. Wir verifizieren die drei Voraussetzungen für 3.3.1:

(i) ist sicher erfüllt, da B Dedekindring ist. (B ist vom endlichen Typ über k , denn $\bar{k} \otimes B \cong \bar{k}^{[1]}$, siehe oben.)

(ii): $A_S = A_a = R[T] = B_a[T] = B_S[T]$ nach Konstruktion und weil $B_a = R$.

(iii): a) $B_a \cap A = R \cap A = B$ nach Definition von B und weil $B_a = R$.

Zur Verifikation von b): Die Voraussetzungen über A und die Definition von B vererben sich sinngemäß auf $E \otimes A$. Auch $E \otimes B = (E \otimes R) \cap (E \otimes A)$ ist Dedekindring (Beweis siehe oben), wir können also gleich $k = E$ annehmen. $\underline{p}$ ist also ein maximales Ideal von B , und $A/\underline{p}A = (A/\underline{p}A)_{B-\underline{p}}$. Setze $B' := B_{B-\underline{p}}$, $A' := A_{B-\underline{p}}$, $\underline{p}' := \underline{p}_{B-\underline{p}}$. Dann ist A' wieder faktoriell, $B'_a \cap A' = B'$, und zu zeigen ist: $\underline{p}'A'$ ist prim. B' ist aber jetzt ein diskreter Bewertungsring, d.h. $\underline{p}' = (\pi)$. Sei $x \in A'$ ein A' -Teiler von π . Dann ist x ein A'_a -Teiler von $\pi \in B'_a \subset B'_a[T] = A'_a$, d.h. auch x ist in B'_a . Daraus folgt $x \in A' \cap B'_a = B'$. Somit ist jede Faktorisierung von π in A' bereits eine Faktorisierung von π in B' , und deshalb ist $\underline{p}'A' = \pi A'$ prim. (A' ist faktoriell!)

Zu c): Wie in b) kann man $E = k$ annehmen. Setze $F := B/\underline{p}$; zu zeigen ist, daß $F = \text{Quot}(B/\underline{p})$ in $\text{Quot}(A/\underline{p}A)$ algebraisch abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung über k ist $F|k$ rein inseparabel (denn $F|k$ ist nach dem HNS über k algebraisch). Deshalb ist $(F \otimes B/\underline{p})_{\text{red}} = (F \otimes F)_{\text{red}} \cong F$, d.h. $\underline{P} := \sqrt{F \otimes \underline{p}}$ ist ein maximales Ideal von $F \otimes B$ mit Restklassenkörper F , und deshalb ist für jede größere Erweiterung $L \otimes F$ auch $L \otimes_F \underline{P}$ ein maximales Ideal von $L \otimes_k B = L \otimes_F (F \otimes B)$ mit Restklassenkörper L . Nach Teil b) mit F und $\underline{P}$ an der Stelle von E ist $C := (F \otimes A)/\underline{P} \cdot (F \otimes A)$ integer, und ebenso $\overline{F} \otimes_F C$. Daraus folgt, daß F via der kanonischen Einbettung $i: x \mapsto x \otimes 1$ in $\text{Quot}(C)$ algebraisch abgeschlossen ist. Enthielte nämlich $\text{Quot}(C)$ einen echten algebraischen Erweiterungskörper $F' > i(F)$, so enthielte $\overline{F} \otimes_F \text{Quot}(C)$ den Ring $\overline{F} \otimes_F F'$, der sicher nicht integer ist, was der Integrität von $\overline{F} \otimes_F C$ widerspricht.

C enthält den Ring $(F \otimes B)/\underline{P} \cong F$, und sowohl das Bild der kanonischen Einbettung i wie auch das Bild der Einbettung $B/\underline{p} \subset C$ sind einundderselbe Ring $(F \otimes B)/\underline{P}$. (Die Inklusion $k \subset C$ kann auf höchstens eine Weise auf F fortgesetzt werden, denn F ist über k rein inseparabel und C reduziert.) Deshalb ist auch $B/\underline{p}$ in $\text{Quot}(C)$ algebraisch abgeschlossen, und a fortiori in $\text{Quot}(A/\underline{p}A) \subset C = ((F \otimes A)/\underline{p} \cdot (F \otimes A))_{\text{red}}$.

d) ist trivial, weil der Integritätsring $(E \otimes B)/\underline{p}$ schon ein Körper ist. (Wie in b) und c) ist $E \otimes B$ wieder dedekindsch.)
q.e.d.

Damit gilt in unserer Situation auch die Konklusion von 3.3.1, also

$$A \cong S_B(P), \quad P \in \text{Pic}(B).$$

Nun ist B aber ein Retrakt des faktoriellen Rings $A = S_B(P)$, also ist $\text{Pic}(B) = 0$ und $P \cong B$, also $A \cong B[T]$, was zu beweisen war.

* * *

Literatur

1. [Al-Kl] A. ALTMAN/S. KLEIMAN: Introduction to Grothendieck Duality Theory, Springer Lecture Notes 146 (1970)
2. [An] G. ANGERMÜLLER, Die Wertehalbgruppe einer ebenen irreduziblen algebroiden Kurve, Math. Z. 153 (1977), 267-282
3. [As]₁ T. ASANUMA: D-algebras which are stably equivalent to $D[Z]$, Proc. Int. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto 1977, p.447-476
4. [As]₂ T. ASANUMA: On quasi-polynomial algebras, Preprint.
5. [Ba-Cn-Wr] H. BASS/E. CONNELL/D. WRIGHT: Locally polynomial algebras are symmetric algebras, Inv. Math. 38(1977), 279-299
6. [Bń] M. BRYŃSKI: Forms of the rings $R[X]$ and $R[X,Y]$. Glasgow Math. J. 13(1972), 91-97
7. [Br-Co] J. BREWER/D. COSTA: Seminormality and projective modules over polynomial rings, J. Alg. 48(1979), 208-216
8. [Br-Ks] J. BREWER/A. KUSTIN: Constructing projective algebras, Preliminary report 782-A22, Proc. A.M.S.
9. [Cn] E. CONNELL: A K-theory for the category of projective algebras, J. Pure Appl. Alg. 5(1974), 281-292
10. [Co] D. COSTA: Retracts of polynomial rings, J. Alg. 44 (1977), 492-502
11. [De-Ga] M. DEMAZURE/P. GABRIEL: Groupes algébriques. Masson und North Holland 1960
12. [Deu] M. DEURING: Lectures on the theory of algebraic function fields of one variable, Springer Lecture Notes 314 (1973)

13. [E-He] P. EAKIN/W. HEINZER: A cancellation problem for rings, in Springer Lecture Notes 311 (1969)
14. [Fo] R. FOSSUM: The Divisor Class Group of a Krull Domain, *Ergebnisse der Mathematik* 74, Springer 1973
15. [Fu] T. FUJITA: On Zariski problem, *Proc. Japan Academy* 55A Nr.3 (1979), 106-110
16. [Gr]₁ C. GREITHER: Projektive Algebren und Abstiegstheorie für Polynomalgebren, Diplomarbeit, Univ. München 1978
17. [Gr]₂ C. GREITHER: Seminormality, projective algebras, and invertible algebras, *J. Alg.* 70(1981), 316-338
18. [Gt]₁ A. GROTHENDIECK: Théorie de la descente I, *Seminaire Bourbaki* 190
19. [Gt]₂ A. GROTHENDIECK: Le groupe de Brauer I, in *Dix exposés sur la cohomologie des schemas*, North Holland 1968
20. [Gt]₂ A. GROTHENDIECK: Revêtements étales et groupe fondamental (SGA I), *Springer Lecture Notes* 224
21. [Ha] E. HAMANN: On the R-invariance of $R[X]$, *J. Alg.* 35 (1975), 1-16
22. [Ht] R. HARTSHORNE: Algebraic geometry, *Springer Graduate Text in Math.* 52, Springer 1977
23. [Ja] N. JACOBSON: Lie algebras, John Wiley and Sons 1962
24. [Ka]₁ T. KAMBAYASHI: On the absence of nontrivial separable forms of the affine plane, *J. Alg.* 35(1975), 449-456
25. [Ka]₂ T. KAMBAYASHI: On one-parameter families of affine planes, *Inv. Math.* 52(1979), 275-281
26. [Ka-M] T. KAMBAYASHI/M. MIYANISHI: On flat fibrations by the affine line, *Ill. J. Math.* 23(1978), 662-671
27. [Ka-M-Ta] T. KAMBAYASHI/M. MIYANISHI/M. TAKEUCHI: Unipotent algebraic groups, *Springer Lecture Notes* 414 (1974)

28. [Kn-O] M.-A. KNUS/M. OJANGUREN: Théorie de la descente et algébres d'Azumaya, Springer Lecture Notes 389 (1974)
29. [Ku] W. van der KULK: On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) 1 (1953), 151-166
30. [M-Su] M. MIYANISHI/T. SUGIE: Affine surfaces containing cylinderlike open sets, J. Math. Kyoto Univ.
31. [Ma] H. MATSUMURA: Commutative algebra, Benjamin 1970
32. [Mo-Wa] R. MORRIS/S. SUI-SHENG WANG: A Jacobian criterion for smoothness, J. Alg. 69(1981), 483-486
33. [Qu] D. QUILLEN: Projective modules over polynomial rings , Inv. Math. 36(1976), 167-171
34. [R]₁ P. RUSSELL: Forms of the affine line and its additive group, Pac. J. Math. 32 Nr.2(1970), 527-539
35. [R]₂ P. RUSSELL: On affine-ruled rational surfaces, Math. Ann. 255(1981), 287-302
36. [R-Sa] P. RUSSELL/A. SATHAYE: On finding and cancelling variables in $k[X,Y,Z]$, J. Alg. 57(1979), 151-166
37. [Sw] R. SWAN: On seminormality, J. Alg. 67(1980), 210-229
38. [St] H. STICHTENOTH: Zur Konservativität algebraischer Funktionenkörper, J. für reine u. ang. Math.301(1978),30-45
39. [Tr] C. TRAVERSO: Seminormality and Picard group, Ann.Sc. Norm.Sup. Pisa 24(1970), 585-595
40. [Tt] J. TATE: Genus change in inseparable extensions of function fields, Proc.Amer.Math.Soc. 3(1952), 400-406
41. [We] C. WEIBEL: K-theory and analytic isomorphisms, Inv. Math. 61(1980), 177-179
42. [Y]₁ J. YANIK: Projective algebras, J. Pure Appl.Alg. 21 (1981), 339-358

- 43. [Y]₂ J. YANIK: Noninvertible retracts, Preprint 1982
- 44. [Pl] B. PLUMSTEAD: The conjectures of Eisenbud and Evans,
Ph. D. dissertation, University of Chicago 1979

*

Lebenslauf

24.8.1956	geboren in Heidelberg
1963-1973	Besuch der Volksschule und des staatl. Görres-Gymnasiums in Düsseldorf; Abitur
1973-1979	Studium der Mathematik mit Nebenfach Infor- matik an der Universität München. Vordiplom 1975, Diplom 1979
1975-1979	verschiedene Tätigkeiten als Korrektor und wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut
1979-1980	Studienjahr an der University of Chicago mit einem Stipendium der Studienstiftung
1979-1982	Promotion bei Prof. B. Pareigis in München
seit Okt.82	Grundwehrdienst in Roth und Ottobrunn

Algebra

Berichte

Herausgeber/Editors

Prof. Dr. Friedrich Kasch,
Prof. Dr. Bodo Pareigis
Mathematisches Institut
der Ludwig-Maximilians-
Universität München
Theresienstr. 39
8000 München 2
West-Germany

Verlag/Publisher

Reinhard Fischer
Grasslfinger Strasse 61
8038 Gröbenzell bei München
West-Germany

Abonnement- oder
Einzeltitelbestellungen richten Sie
an den Verlag.

Korrespondenz und Manuskripte
bitte an die Herausgeber.

Please send subscription or
copy order directly to the publisher.

Please send correspondence and
manuscripts to the editors.

ISBN 3-88927-002-6